



Cours : Racines carrées – 3AC

On appelle racine carrée d'un nombre réel positif a le réel noté $\sqrt{a}$ dont le carré est égal à a .

Propriétés

$$\bullet (\sqrt{a})^2 = a$$

$$\bullet \sqrt{a^2} = |a|$$

$$\bullet a \geq 0, b \geq 0;$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\bullet \quad x^2 = a \text{ avec } a \text{ positif} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$

Attention :

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}; \quad \forall a > 0, b$$

Méthode 1 :

Chercher à mettre en facteur une racine. Chercher les racines parfaites.

Exemple : Donnons une écriture plus simple des expressions suivantes

$$A = 5\sqrt{25 \times 6} - 8\sqrt{36 \times 6} + 6\sqrt{6} - 7\sqrt{100 \times 6}$$

Remarquons que l'on peut mettre en facteur la racine de 6

$$\begin{aligned} &= 5\sqrt{25} \times \sqrt{6} - 8\sqrt{36} \times \sqrt{6} + 6\sqrt{6} - 7\sqrt{100} \times \sqrt{6} \\ &= 25\sqrt{6} - 48\sqrt{6} + 6\sqrt{6} - 70\sqrt{6} \\ &= (25 - 48 + 6 - 70)\sqrt{6} \\ &= -87\sqrt{6} \end{aligned}$$

Un autre exemple :

$$B = \frac{5}{3}\sqrt{108} - \frac{4}{5}\sqrt{432} + \frac{3}{2}\sqrt{243} - \frac{1}{3}\sqrt{75}$$

Remarquons que l'on peut dégager à la fois les racines parfaites et mettre en facteur la racine de 3.

$$= \frac{5}{3} \sqrt{36} \times \sqrt{3} - \frac{4}{5} \sqrt{144} \times \sqrt{3} + \frac{3}{2} \sqrt{81} \times \sqrt{3} - \frac{1}{4} \sqrt{16} \times \sqrt{3}$$

$$= \frac{30}{3} \sqrt{3} - \frac{48}{5} \sqrt{3} + \frac{27}{2} \sqrt{3} - \frac{5}{3} \sqrt{3}$$

$$= \frac{300}{30} \sqrt{3} - \frac{288}{30} \sqrt{3} + \frac{405}{30} \sqrt{3} - \frac{50}{30} \sqrt{3}$$

$$= \frac{367}{30} \sqrt{3}$$

Exemple 2 :

Ecrivons les expressions suivantes sous la forme $a+b \cdot c$

$$A = 2 \sqrt{3} (4 - \sqrt{3})$$

$$= 8 \sqrt{3} - 18$$

Nous venons de développer l'expression.

$$B = 3 \sqrt{2} (3 \sqrt{6} - 2 \sqrt{2})$$

$$= 9 \sqrt{12} - 12$$

$$= 9 \cdot 4 \times 3 - 12$$

$$= 18 \sqrt{3} - 12$$

$$C = (2 \sqrt{5} - 3)^2$$

$$= 20 - 12 \sqrt{5} + 9$$

$$= 29 - 12 \cdot 5$$

$$D = (2 + 1)(2 + 3)$$

$$= 2 + 3 \cdot 2 + 2 + 3$$

$$= 5 + 4 \cdot 2$$

$$E = (2 + 5)^2$$

$$= 4 + 4 \cdot 5 + 5$$

$$= 9 + 4 \cdot 5$$

$$F = (5 - 7)(5 + 7)$$

$$= 5 - 7 = -2$$

Méthode II. Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient :

Ici on doit se débarrasser des racines dans le dénominateur D pour pouvoir simplifier.

II.1 Expression de la forme

$$\frac{N}{a\sqrt{b}}$$

Règles :

Pour rendre rationnel le dénominateur de cette expression , on multiplie tout simplement les termes du quotient par $\sqrt{b}$.

On a :

$$\frac{N}{a\sqrt{b}} = \frac{N \times \sqrt{b}}{a\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{N\sqrt{b}}{a \cdot b}$$

Exemples

$$A = \frac{5}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

$$B = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(2 - 2\sqrt{3})\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{2}$$

on simplifie par 2 et on trouve : $= \sqrt{2} - \sqrt{6}$

$$\begin{aligned}C &= \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \\&= \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \\&= \frac{2\sqrt{6}}{6} \\&= \frac{\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

Ecrivons les expressions A et B suivantes sous la forme $a \cdot b$

A =

$$5\sqrt{\frac{27}{8}} - 4\sqrt{\frac{15}{10}} - 7\sqrt{\frac{48}{98}}$$

$$5\sqrt{\frac{9 \times 3}{4 \times 2}} - 4\sqrt{\frac{5 \times 3}{5 \times 2}} - 7\sqrt{\frac{2 \times 24}{2 \times 49}}$$

$$= \frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - 4\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 7\sqrt{\frac{24}{49}}$$

$$= \frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - 4\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 7\frac{\sqrt{4 \times 6}}{\sqrt{49}}$$

$$= \frac{15\sqrt{6}}{4} - 4\frac{\sqrt{6}}{2} - 2\sqrt{6}$$

$$= \frac{15\sqrt{6}}{4} - 8\frac{\sqrt{6}}{4} - 8\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

B =

$$\frac{2}{3} \sqrt{\frac{54}{16}} - \frac{6}{5} \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{6}{18} \sqrt{6}$$

$$\frac{2}{3} \frac{\sqrt{9} \times 6}{\sqrt{4} \times 4} - \frac{6}{5} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{6\sqrt{6}}{18}$$

$$= \frac{6\sqrt{6}}{12} - \frac{6\sqrt{6}}{10} - \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$= \frac{15\sqrt{6}}{30} - \frac{18\sqrt{6}}{30} - \frac{10\sqrt{6}}{30}$$

$$= -\frac{13\sqrt{6}}{30}$$

II.2 Expression de la forme : $N/d(a+b\sqrt{c})$

$$\frac{N}{d(a + b\sqrt{c})}$$

Règles :

Pour rendre rationnel le dénominateur d'une expression de la forme $N/d(a+b\sqrt{c})$, on multiplie tout simplement les termes du quotient par $(a-b\sqrt{c})$, appelé expression conjuguée de $(a+b\sqrt{c})$.

Rappelons aussi que: $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$: Identité remarquable.

Remarque :

Cas où l'expression est de la forme $N/a\sqrt{b+c\sqrt{d}}$

Pour rendre rationnel le dénominateur d'une expression de la forme $N/a\sqrt{b+c\sqrt{d}}$, on multiplie les termes du quotient par $(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})$, appelé expression conjuguée de l'expression $(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{N}{d(a + b\sqrt{c})} &= \frac{N \times (a - b\sqrt{c})}{d(a + b\sqrt{c})(a - b\sqrt{c})} \\ &= \frac{N(a - b\sqrt{c})}{d(a^2 - b^2 \cdot c)}\end{aligned}$$

ET

$$\begin{aligned}\frac{N}{a\sqrt{b} + c\sqrt{d}} &= \frac{N \times (a\sqrt{b} - c\sqrt{d})}{(a\sqrt{b} + c\sqrt{d})(a\sqrt{b} - c\sqrt{d})} \\ &= \frac{N(a\sqrt{b} - c\sqrt{d})}{a^2 \cdot b - c^2 \cdot d}\end{aligned}$$

Exemple 1 :

Rendons rationnel le dénominateur des expressions suivantes

$$A = \frac{2 - 3\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(2 - 3\sqrt{3})(3 - 2\sqrt{3})}{(3 + 2\sqrt{3})(3 - 2\sqrt{3})}$$

$$= \frac{6 - 4\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 12}{9 - 12}$$

$$= \frac{24 - 13\sqrt{3}}{-3}$$

$$= \frac{-24 + 13\sqrt{3}}{3}$$

$$= -8 + \frac{13\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{2\sqrt{2}}{-3(-3 + 2\sqrt{2})} \\
 &= \frac{2\sqrt{2}(-3 - 2\sqrt{2})}{-3(-3 + 2\sqrt{2})(-3 - 2\sqrt{2})} \\
 &= \frac{-6\sqrt{2} - 8}{-3(9 - 8)} \\
 &= \frac{-6\sqrt{2} - 8}{-3} \\
 &= \frac{6\sqrt{2} + 8}{3}
 \end{aligned}$$