Cours Développer, factoriser et simplifier 3AC

I . Développement et réductions d'expressions littérales

Développer une expression littérale, c'est l'utilisation directe de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction.

I.1 La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction

Soient a, b, c et d quatre réels ; on a :

- **$a(b+c)=a.b+a.c$**
- **$a(b-c)=a.b-a.c$**
- **$(a+b)(c+d)=a.c+a.d+b.c+b.d$**
- **$(a+b)(c-d)=a.c-a.d+b.c-b.d$**
- **$(a-b)(c+d)=a.c+a.d-b.c-b.d$**
- **$(a-b)(c-d)=a.c-a.d-b.c+b.d$**

Application :

Développons puis réduisons les expressions littérales suivantes :

$A=(3x+2)(2x-3)-(x-2)(3x-1)-x(4x+3)$

$=(6x^2-9x+4x-6)-(3x^2-x-6x+2)-(4x^2+3x)$

$=6x^2-9x+4x-6-3x^2+x+6x-2-4x^2-3x$

$=-x^2-x-8$

D’où, $A=-23x^2+x-16$

$\mathbf{B=5(3x-2)(-x+5)-4(3x-2)(-7x+2)-15x(3x-2)}$

$\mathbf{=5(-3x^2+15x+2x-10)-4(-21x^2+6x+14x-4)-(45x^2-30x)}$

$\mathbf{=(-15x^2+75x+10x-50)-(-84x^2+24x+56x-16)-(45x^2-30x)}$

$\mathbf{=-15x^2+75x+10x-50+84x^2-24x-56x+16-45x^2+30x}$

D’où, $B=24x^2+35x-34$

I.2 Égalités usuelles ou Identités remarquables

Soient a et b deux nombres réels ; on a :

- $\mathbf{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$
- $\mathbf{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$
- $\mathbf{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$

Applications :

Développons les expressions suivantes :

$\mathbf{A=(3x+2)^2}$

$\mathbf{=9x^2+10x+4}$

$\mathbf{B=(2\ \ 3x-3)^2}$

$\mathbf{=12x^2-12\ \ 3x+9}$

$\mathbf{C=(2\ \ 3x-2\ \ 7)(2\ \ 3x+2\ \ 7)}$

$\mathbf{=20x^2-28}$

I.3 Applications : combinaisons de deux méthodes

Développons puis réduisons les expressions littérales suivantes :

$\mathbf{A=2(3x-2)^2+3(2x-3)(2x+3)-(4x-2)(3x-1)}$

$\mathbf{=2(9x^2-12x+4)+3(4x^2-9)-(12x^2-4x-6x+2)}$

$\mathbf{=(18x^2-24x+8)+(12x^2-27)-(12x^2-4x-6x+2)}$

$\mathbf{=18x^2-24x+8+(12x^2-27-12x^2+4x+6x-2}$

D’où, $A=18x^2-14x-21$

$B=3(-2x+1)^2+2(-3x+2)(2x+3)-4(3+2x)^2$

$=3(4x^2-4x+1)+2(6x^2-9x+4x-6)-4(9+12x+4x^2)$

$=(12x^2-12x+3)+(-12x^2-18x+8x+12)-(36+42x+16x^2)$

$=12x^2-12x+3-12x^2-18x+8x+12-36-42x-16x^2$

D'où, $B=-16x^2-70x-21$

II. Factorisation

Factoriser une expression littérale c'est mettre ces termes sous la forme de produits de deux ou plusieurs facteurs par l'utilisation dans le sens inverse :

de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction

- **$a.b+a.c=a(b+c)$**
- **$a.b-a.c=a(b-c)$**
- **$a.b+a.d+b.c+b.d=a(c+d)+b(c+d)=(a+b)(c+d)$**
- **$a.b-a.d+b.c-b.d=a(c-d)+b(c-d)=(a+b)(c-d)$**
- **$a.b+a.d-b.c-b.d=a(c+d)-b(c+d)=(a-b)(c+d)$**
- **$a.b-a.d-b.c+b.d=a(c-d)-b(c-d)=(a-b)(c-d)$**

.

des égalités usuelles

- **$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$**
- **$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$**
- **$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$**

Il n'y a pas de méthodes spécifiques pour faire une factorisation, on aura soit à mettre en évidence un facteur commun, soit à utiliser les égalités usuelles ou soit à combiner à la fois les deux méthodes.

II.1 Mise en évidence du facteur commun

II.1.1 Cas où le facteur commun est apparent

Exemple :

Factorisons les expressions littérales suivantes :

$A=(2x-1)^2+(2x-1)(3x+5)-4x(2x-1)+(2x-1)$

$=(2x-1)[(2x-1)+(3x+5)-4x+1]$

$=(2x-1)(2x-1+3x+5-4x+1)$

D'où, $A=(2x-1)(x+5)$

$B=3(x+3)(x-3)-2(2x+1)(x+3)-(x+3)$

$=(x+3)[3(x-3)-2(2x+1)-1]$

$=(x+3)(3x-9-4x-1-2)$

D'où, $B=(x+3)(-x-12)$ ou bien $B=(x+3)(x+12)$

II.1.2 Cas où le facteur commun est caché

Il faut procéder à des factorisations partielles au niveau des termes qui composent l'expression afin de mettre en évidence le facteur commun.

Exemple :

Factorisons les expressions littérales suivantes :

$A=(-2x+1)^2-(6x-3)(5x+1)-(4x-2)$

$=(2x-1)[(2x-1)-3(5x+1)-2]$

$=(2x-1)(2x-1-15x-3-2)$

D'où, $A=(2x-1)(-13x-6)=-(2x-1)(13x+6)$

$B=(15x+10)(-x+5)-(12x-8)(-7x+2)-5(6x-9\times 2)$

$=5(3x-2)(-x+5)-4(3x-2)(-7x+2)-15x(2-3x)$

$=5(3x-2)(-x+5)-4(3x-2)(-7x+2)+15x(3x-2)$

$=(3x-2)[5(-x+5)-4(-7x+2)+15x]$

$=(3x-2)(-5x+25+28x-8+15x)$

D'où, $B=(3x-2)(38x+17)$

$C=2(3-2x)^2-(6x-9)(x+2)-2x+3$

$=2(2x-3)^2-3(2x-3)(x+2)-(2x-3)$

$=(2x-3)[2(2x-3)-3(x+2)-1]$

$=(2x-3)(4x-6-3x+6-1)$

D'où, $C=(2x-3)(x-13)$

II.2 L'utilisation des égalités usuelles

Exemple :

Factorisons les expressions littérales suivante

$A=9x^2+6x+1=(3x+1)^2$

$B=1625x^2-2x+2516=(45x-54)^2$

$C=49x^2-36=(7x-6)(7x+6)$

$D=(2x+3)^2-(x+2)^2$

Elle est de la forme : $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, donc :

$=[(2x+3)+(x+2)][(2x+3)-(x+2)]$

$=(2x+3+x+2)(2x+3-x-2)$

$=(3x+5)(x+1)$

$E=(3x-1)^2+2(3x-1)(2x+3)+(2x+3)^2$

Elle est de la forme : $a^2+2a.b+b^2=(a+b)^2$, donc :

$=[(3x-1)+(2x+3)]^2$

$=(5x+2)^2$

II.3 Combinaison simultanée des deux méthodes

Exemple :

Factorisons les expressions littérales suivantes :

$A=2x^2-98-(3x+21)(4x-3)+(2x^2+28x+98)-2x-14$

$=2(x^2-49)-3(x+7)(4x-3)+2(x^2+14x+49)-(2x+14)$

$=2(x-7)(x+7)-3(x+7)(4x-3)+2(x+7)^2-2(x+7)$

$=(x+7)[2(x-7)-3(4x-3)+2(x+7)-2]$

$=(x+7)(2x-14-12x+9+2x+14-2)$

D'où, $A=(x+7)(-8x+7)$

$B=(3x^2-30x+75)+(2x-10)(2x-3)+(50-2x^2)$

$=3(x^2-10x+25)+2(x-5)(2x-3)+2(25-x^2)$

$=3(x-5)^2+2(x-5)(2x-3)+2(5-x)(5+x)$

$=3(x-5)^2+2(x-5)(2x-3)-2(x-5)(5+x)$

$=(x-5)[3(x-5)+2(2x-3)-2(5+x)]$

$=(x-5)(3x-15+4x-6-10-2x)$

D’où, $B=(x-5)(5x-31)$

III. Simplification

Simplifier un quotient d’expressions littérales dont les termes sont présentes de manière factorisée et dont la condition d’existence est initialement posée revient tout bonnement à éliminer autant de fois tout facteur commun entre les termes du quotient (le numérateur et le dénominateur).

Exemple :

$A=(3x-2)(2x+5)$ / $3(3x-2)(x+5)$ = $(2x+5)$ / $(x+5)$