

Racine carrée - 3e



Classe: Troisième

I. Définition et propriétés

I.1 Définition

On appelle racine carrée d'un nombre réel positif a le réel noté $\sqrt{a}$ dont le carré est égal à a .

I.2 Propriétés

$$\bullet (\sqrt{a})^2 = a$$

$$\bullet \sqrt{a^2} = |a|$$

$$\bullet a \geq 0, b \geq 0; \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\bullet a \geq 0, b > 0; \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\bullet x^2 = a \text{ avec } a \text{ positif} \Rightarrow x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$

Attention :

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}; \quad \forall a > 0, b > 0$$

Exemple 1 :

Donnons une écriture plus simple des expressions suivantes

$$\begin{aligned}
 A &= 5\sqrt{25 \times 6} - 8\sqrt{36 \times 6} + 6\sqrt{6} - 7\sqrt{100 \times 6} \\
 &= 5\sqrt{25} \times \sqrt{6} - 8\sqrt{36} \times \sqrt{6} + 6\sqrt{6} - 7\sqrt{100} \times \sqrt{6} \\
 &= 25\sqrt{6} - 48\sqrt{6} + 6\sqrt{6} - 70\sqrt{6} \\
 &= (25 - 48 + 6 - 70)\sqrt{6} \\
 &= -87\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
&= \frac{300}{30}\sqrt{3} - \frac{288}{30}\sqrt{3} + \frac{405}{30}\sqrt{3} - \frac{50}{30}\sqrt{3} \\
&= \frac{367}{30}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

D'où,

$$B = \frac{367}{30}\sqrt{3}$$

Exemple 2 :

Ecrivons les expressions suivantes sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$ et $c \in \mathbb{Q}$

$$A = 2\sqrt{3}(4 - 3\sqrt{3})$$

$$= 8\sqrt{3} - 18$$

D'où,

$$A = 8\sqrt{3} - 18$$

$$B = 3\sqrt{2}(3\sqrt{6} - 2\sqrt{2})$$

$$= 9\sqrt{12} - 12$$

$$= 9\sqrt{4} \times \sqrt{3} - 12$$

$$= 18\sqrt{3} - 12$$

Donc,

$$B = 18\sqrt{3} - 12$$

$$C = (2\sqrt{5} - 3)^2$$

$$= 20 - 12\sqrt{5} + 9$$

$$= 29 - 12\sqrt{5}$$

D'où,

$$C = 29 - 12\sqrt{5}$$

$$D = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 3)$$

$$= 2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{2} + 3$$

$$= 9 + 4\sqrt{5}$$

Donc,

$$\boxed{E = 9 + 4\sqrt{5}}$$

$$F = (\sqrt{5} - \sqrt{7})(\sqrt{5} + \sqrt{7})$$

$$= 5 - 7$$

$$= -2$$

D'où,

$$\boxed{\overline{F} = -2}$$

II. Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient : Expression conjuguée

II.1 Expression de la forme $\frac{N}{a\sqrt{b}}$ avec $a \in \mathbb{Q}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$

Règles :

Pour rendre rationnel le dénominateur d'une expression de la forme $\frac{N}{a\sqrt{b}}$, on multiplie tout simplement les termes du quotient par $\sqrt{b}$.

On a :

$$\frac{N}{a\sqrt{b}} = \frac{N \times \sqrt{b}}{a\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{N\sqrt{b}}{a \cdot b}$$

Exemple 1 :

Rendons rationnel le dénominateur des expressions suivantes

$$A = \frac{5}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

Donc,

$$\boxed{A = \frac{5\sqrt{3}}{6}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{2}$$

D'où,

$$B = \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{2}$$

$$C = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Donc,

$$C = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Exemple 2 :

Ecrivons les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{N}$

$$A = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$$

$$= 5\sqrt{\frac{27}{8}} - 4\sqrt{\frac{15}{10}} - 7\sqrt{\frac{48}{98}}$$

$$= 5\sqrt{\frac{9 \times 3}{4 \times 2}} - 4\sqrt{\frac{5 \times 3}{5 \times 2}} - 7\sqrt{\frac{2 \times 24}{2 \times 49}}$$

$$= \frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - 4\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 7\sqrt{\frac{24}{49}}$$

$$= \frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - 4\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 7\frac{\sqrt{4} \times 6}{\sqrt{49}}$$

$$= \frac{15\sqrt{6}}{4} - 4\frac{\sqrt{6}}{2} - 2\sqrt{6}$$

$$= \frac{15\sqrt{6}}{4} - 8\frac{\sqrt{6}}{4} - 8\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

D'où,

$$A = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{54}{16}} - \frac{6}{5} \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{6}{18} \sqrt{6} \\ &= \frac{2}{3} \frac{\sqrt{9 \times 6}}{\sqrt{4 \times 4}} - \frac{6}{5} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{6\sqrt{6}}{18} \\ &= \frac{6\sqrt{6}}{12} - \frac{6\sqrt{6}}{10} - \frac{\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{15\sqrt{6}}{30} - \frac{18\sqrt{6}}{30} - \frac{10\sqrt{6}}{30} \\ &= -\frac{13\sqrt{6}}{30} \end{aligned}$$

D'où,

$$B = -\frac{13\sqrt{6}}{30}$$

II.2 Expression de la forme $\frac{N}{d(a+b\sqrt{c})}$ avec $a, b, d \in \mathbb{Q}^*$ et $c \in \mathbb{N}$

Règles :

Pour rendre rationnel le dénominateur d'une expression de la forme $\frac{N}{d(a+b\sqrt{c})}$, on multiplie tout simplement les termes du quotient par $(a-b\sqrt{c})$, appelé expression conjuguée de $(a+b\sqrt{c})$.

Remarque :

Cas où l'expression est de la forme $\frac{N}{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}}$

Pour rendre rationnel le dénominateur d'une expression de la forme $\frac{N}{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}}$, on multiplie les termes du quotient par $(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})$, appelé expression conjuguée de l'expression $(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})$.

Ainsi,

$$\frac{N}{a\sqrt{b} + c\sqrt{d}} = \frac{N \times (a\sqrt{b} - c\sqrt{d})}{a\sqrt{b} + c\sqrt{d})(a\sqrt{b} - c\sqrt{d})}$$

$$= \frac{N(a\sqrt{b} - c\sqrt{d})}{a^2 \cdot b - c^2 \cdot d}$$

Exemple 1 :

Rendons rationnel le dénominateur des expressions suivantes

$$\begin{aligned} A &= \frac{2 - 3\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{(2 - 3\sqrt{3})(3 - 2\sqrt{3})}{(3 + 2\sqrt{3})(3 - 2\sqrt{3})} \\ &= \frac{6 - 4\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 12}{9 - 12} \\ &= \frac{24 - 13\sqrt{3}}{-3} \\ &= \frac{-24 + 13\sqrt{3}}{3} \\ &= -8 + \frac{13\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

D'où,

$$A = -8 + \frac{13\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-6\sqrt{2} - 8}{-3(9 - 8)} \\
&= \frac{-6\sqrt{2} - 8}{-3} \\
&= \frac{6\sqrt{2} + 8}{3}
\end{aligned}$$

Donc,

$$B = \frac{6\sqrt{2} + 8}{3}$$

$$\begin{aligned}
C &= \frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{4\sqrt{3} + 5\sqrt{2}} \\
&= \frac{(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})(4\sqrt{3} - 5\sqrt{2})}{(4\sqrt{3} + 5\sqrt{2})(4\sqrt{3} - 5\sqrt{2})} \\
&= \frac{8\sqrt{6} - 20 - 36 + 15\sqrt{6}}{48 - 50} \\
&= \frac{-56 + 23\sqrt{6}}{-2} \\
&= \frac{56 - 23\sqrt{6}}{2} \\
&= 28 - \frac{23\sqrt{6}}{2}
\end{aligned}$$

D'où,

$$C = 28 - \frac{23\sqrt{6}}{2}$$

Exemple 2 :

Ecrivons l'expression suivante sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$ et $c \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{45 - 6\sqrt{5} + 1}{2} \\
&= \frac{2 - 2\sqrt{5}}{46 - 6\sqrt{5}} \\
&= \frac{1 - \sqrt{5}}{23 - 3\sqrt{5}} \\
&= \frac{(1 - \sqrt{5})(23 + 3\sqrt{5})}{(23 - 3\sqrt{5})(23 + 3\sqrt{5})} \\
&= \frac{23 + 3\sqrt{5} - 23\sqrt{5} - 15}{529 - 45} \\
&= \frac{8 - 20\sqrt{5}}{484} \\
&= \frac{2 - 5\sqrt{5}}{121}
\end{aligned}$$

D'où,

$$A = \frac{2 - 5\sqrt{5}}{121}$$

III. Comparaison de réels comportant des radicaux

III.1 Réels du type $a\sqrt{b}$

Règle 1 :

Pour comparer deux réels positifs du type $a\sqrt{b}$ on les élève au carré et celui qui aura le carré le plus grand correspondra au réel le plus grand.

Exemple 1 :

Comparons les réels suivants

$3\sqrt{2}$ et $2\sqrt{3}$ puis, 5 et $2\sqrt{7}$.

On a : $(3\sqrt{2})^2 = 18$ et $(2\sqrt{3})^2 = 12$

Or, $18 > 12$ alors, $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$.

De même on a $(5)^2 = 25$ et $(2\sqrt{7})^2 = 28$

Or, $28 > 25$ alors, $2\sqrt{7} > 5$.

Exemple 2 :

Or, $28 > 25$ alors, $2\sqrt{7} > 5$

Donc, $-5 + 2\sqrt{7} > 0$

Règle 2 :

Pour comparer deux réels négatifs du type $a\sqrt{b}$ on les élève au carré et celui qui aura le carré le plus petit correspondra au réel le plus grand.

Exemple 1 :

Comparons les réels suivants

$-3\sqrt{2}$ et $-2\sqrt{3}$ puis, -4 et $-2\sqrt{5}$.

On a : $(-3\sqrt{2})^2 = 18$ et $(-2\sqrt{3})^2 = 12$

Or, $12 < 18$ alors, $-3\sqrt{2} < -2\sqrt{3}$.

De même on a $(-4)^2 = 16$ et $(-2\sqrt{5})^2 = 20$

Or, $16 < 20$ alors, $-4 > -2\sqrt{5}$.

Exemple 2 :

Trouvons deux entiers relatifs consécutifs qui encadrent $-2\sqrt{3}$

On a : $(-2\sqrt{3})^2 = 12$; or $9 < 12 < 16$ et $-2\sqrt{3} < 0$ alors, $(-3)^2 < (-2\sqrt{3})^2 < (-4)^2$

Donc, $-4 < -2\sqrt{3} < -3$

III.2 Réels du type $a + b\sqrt{c}$ et $\sqrt{a' + b'\sqrt{c}}$

Exemple :

Comparons les réels suivants

$2 - \sqrt{2}$ et $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$

signe de $2 - \sqrt{2}$: on a $(2)^2 = 4$ et $(\sqrt{2})^2 = 2$ alors, $2 > \sqrt{2}$.

Donc, $2 - \sqrt{2} > 0$

Ainsi, $(2 - \sqrt{2})^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 6 - 4\sqrt{2}$ et $(\sqrt{6 - 4\sqrt{2}})^2 = 6 - 4\sqrt{2}$

Par suite, $2 - \sqrt{2} = \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$

IV Racine carrée du carré d'un réel

La valeur absolue d'un nombre réel est toujours positif.

Exemple :

On a :

$$|2.21| = 2.21, \quad \left| -\frac{3}{7} \right| = \frac{3}{7}, \quad |-2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$|3 + \sqrt{2}| = 3 + \sqrt{2}, \quad |3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2}$$

$$|2\sqrt{3} - 4| = -(2\sqrt{3} - 4) = -2\sqrt{3} + 4$$

IV.1.2 Propriétés

P_1 : Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^+$

On a : $|x| = y$ si, et seulement si $x = y$ ou $x = -y$

Exemple :

Résolvons les équations suivantes

$$\bullet |2x + 3| = 5$$

On aura $2x + 3 = 5$ ou $2x + 3 = -5$

Alors, $2x = 2$ ou $2x = -8$

Donc, $x = 1$ ou $x = -4$

D'où,

$$S = \{-4 ; 1\}$$

$$\bullet \left| -\frac{2}{3}x + 4 \right| = 6$$

On aura $-\frac{2}{3}x + 4 = 6$ ou $-\frac{2}{3}x + 4 = -6$

Alors, $-\frac{2}{3}x = 2$ ou $-\frac{2}{3}x = -10$

Donc, $x = 2 \left(-\frac{3}{2} \right) = -3$ ou $x = -10 \left(-\frac{3}{2} \right) = 15$

D'où,

$$S = \{-3 ; 15\}$$

Alors, $x = 2$ ou $5x = -12$

Donc, $x = 2$ ou $x = -\frac{12}{5}$

D'où,

$$S = \left\{ -\frac{12}{5} ; 2 \right\}$$

$$\bullet \left| \frac{2}{3}x + 3 \right| = \left| -\frac{3}{2}x + 5 \right|$$

On aura $\frac{2}{3}x + 3 = -\frac{3}{2}x + 5$ ou $\frac{2}{3}x + 3 = \frac{3}{2}x - 5$

Alors, $\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}x = 2$ ou $\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}x = -8$

Donc, $\frac{4}{6}x + \frac{9}{6}x = 2$ ou $\frac{4}{6}x - \frac{9}{6}x = -8$

Ainsi, $\frac{13}{6}x = 2$ ou $\frac{5}{6}x = -8$

Par suite, $x = 2 \left(\frac{6}{13} \right) = \frac{12}{13}$ ou $x = -8 \left(-\frac{6}{5} \right) = \frac{48}{5}$

D'où,

$$S = \left\{ \frac{12}{13} ; \frac{48}{5} \right\}$$

P_3 : Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^+$

On a : $|x| \leq y$ si, et seulement si $x \leq y$ et $x \geq -y$

Exemple :

Résolvons les inéquations suivantes

$$\bullet |3x + 7| \leq 5$$

On aura : $3x + 7 \leq 5$ et $3x + 7 \geq -5$

Alors, $3x \leq -2$ et $3x \geq -12$

Donc, $x \leq -\frac{2}{3}$ et $x \geq -4$

D'où

$$S = \left[-4 ; -\frac{2}{3} \right]$$

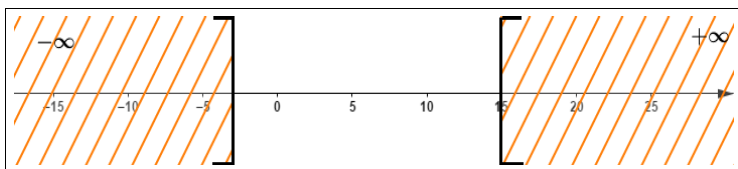
$$\bullet \left| -\frac{2}{3}x + 4 \right| < 6$$

On aura : $-\frac{2}{3}x + 4 < 6$ et $-\frac{2}{3}x + 4 > -6$

Alors, $-\frac{2}{3}x < 2$ et $-\frac{2}{3}x > -10$

Donc, $x > 6 \left(-\frac{3}{2} \right)$ et $x < -10 \left(-\frac{3}{2} \right)$

Ainsi, $x > -3$ et $x < 15$



D'où,

$$S =]-3 ; 15[$$

P_4 : Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^+$

On a : $|x| \geq y$ si, et seulement si $x \geq y$ ou $x \leq -y$

Exemple :

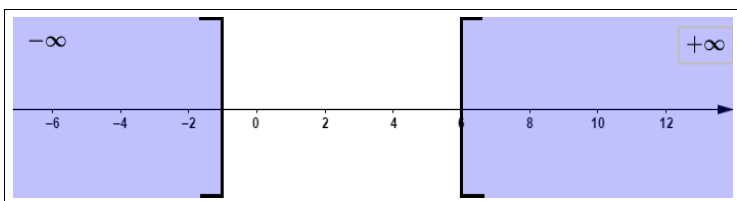
Résolvons les inéquations suivantes

$$\bullet |2x - 5| \geq 7$$

On aura : $2x - 5 \geq 7$ ou $2x - 5 \leq -7$

Alors, $2x \geq 12$ ou $2x \leq -2$

Donc, $x \geq 6$ ou $x \leq -1$



D'où

$$S =]-\infty ; -1] \cup [6 ; +\infty[$$

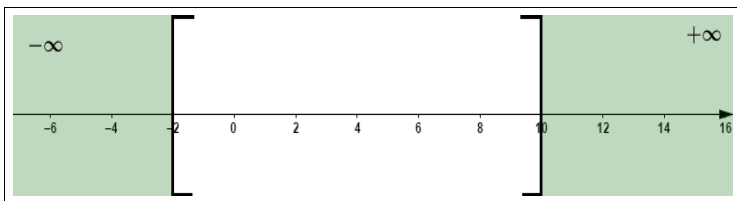
$$\bullet \left| -\frac{3}{2}x + 6 \right| > 9$$

$$\text{On aura : } -\frac{3}{2}x + 6 > 9 \text{ ou } -\frac{3}{2}x + 6 < -9$$

$$\text{Alors, } -\frac{3}{2}x > 3 \text{ ou } -\frac{3}{2}x < -15$$

$$\text{Donc, } x < 3 \left(-\frac{2}{3} \right) \text{ ou } x > -15 \left(-\frac{2}{3} \right)$$

$$\text{Ainsi, } x < -2 \text{ ou } x > 10$$



$$S =]-\infty ; -2[\cup]10 ; +\infty[$$

IV.2 Expression de la racine carrée du carré d'un réel en fonction de la valeur absolue du réel

$$\text{On a ; pour } x \geq 0 ; \sqrt{x^2} = x \text{ et pour } x < 0 ; \sqrt{x^2} = -x.$$

$$\text{Et comme pour } x \geq 0 ; |x| = x \text{ et pour } x < 0 ; |x| = -x.$$

$$\text{Ainsi, } |x| = \sqrt{x^2}$$

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R} : \text{ on a } \sqrt{x^2} = |x|$$

$$\text{Donc, } B = |2\sqrt{3} - 4|$$

signe de $2\sqrt{3} - 4$: on a $(2\sqrt{3})^2 = 12$ et $(4)^2 = 16$. Alors, $2\sqrt{3} - 4 < 0$.

$$\text{Ainsi, } B = -2\sqrt{3} + 4$$

2) Résoudre l'équation suivante :

$$4x^2 - 9 = 0$$

$$\text{On aura : } 4x^2 = 9$$

$$\text{Alors, } x^2 = \frac{9}{4}$$

$$\text{Donc, } \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$\text{Par suite } |x| = \frac{3}{2}$$

$$\text{Ainsi, } x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2}$$

D'où,

$$S = \left\{ -\frac{3}{2} ; \frac{3}{2} \right\}$$

3) Résoudre l'inéquation suivante :

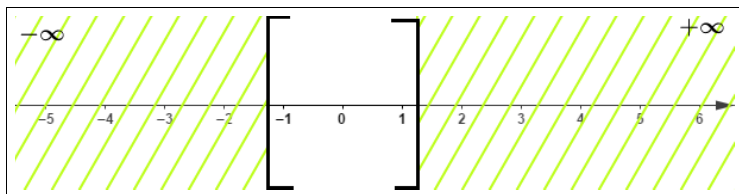
$$16x^2 - 25 \leq 0$$

$$\text{On aura : } 16x^2 \leq 25$$

$$\text{Alors, } x^2 \leq \frac{25}{16}, \text{ donc } \sqrt{x^2} \leq \sqrt{\frac{25}{16}}.$$

$$\text{Ainsi, } |x| \leq \frac{5}{4}$$

$$\text{Par suite, } x \leq \frac{5}{4} \text{ et } x \geq -\frac{5}{4}$$



Mais pour $k \in \mathbb{N}$, on peut trouver une valeur approchée par défaut ou par excès de $\sqrt{3}$ à 10^{-k} près (k chiffres après la virgule).

Exemple 1 :

Trouver la valeur approchée par défaut de $\sqrt{3}$ à 10^{-1} près.

Je cherche deux entiers consécutifs tels que , $a.10^{-1} < \sqrt{3} < (a + 1).10^{-1}$.

J'élève l'inégalité au carré. On obtient $a^2.10^{-2} < 3 < (a + 1)^2.10^{-2}$.

Je multiplie par 10^{+2} pour faire disparaître les 10^{-2} . On trouve $a^2 < 300 < (a + 1)^2$.

Je cherche maintenant deux carrés parfaits consécutifs qui encadrent 300.

On a : $289 < 300 < 324$, c'est à dire $17^2 < 300 < (17 + 1)^2$.

J'en déduis alors que $a = 17$, $a + 1 = 18$ et $a.10^{-1} = 1.7$

Je reviens à la condition posée au départ, $1.7 < \sqrt{3} < 1.8$

1.7 est la valeur approchée par défaut de $\sqrt{3}$ à 10^{-1} près.

1.8 est la valeur approchée par excès de $\sqrt{3}$ à 10^{-1} près.

Exemple 2 :

Exemple 1 :

Sachant que $1.732 < \sqrt{3} < 1.733$ donner un encadrement de $2\sqrt{3} - 4$ à 10^{-2} près.

On a : $1.732 < \sqrt{3} < 1.733$

Alors, $3.464 < 2\sqrt{3} < 3.466$

Donc, $-0.536 < 2\sqrt{3} - 4 < -0.534$

D'où, $-0.54 < 2\sqrt{3} - 4 < -0.53$

Exemple 2 :

Sachant que $2.236 < \sqrt{5} < 2.237$ donnons un encadrement de $\frac{5 - 2\sqrt{5}}{2}$ à 10^{-2} près.

On a : $2.236 < \sqrt{5} < 2.237$

Alors, $-4.472 > -2\sqrt{5} > -4.474$

Donc, $0.528 > 5 - 2\sqrt{5} > 0.526$

Ainsi, $0.264 > \frac{5 - 2\sqrt{5}}{2} > 0.263$

Par suite, $0.263 < \frac{5 - 2\sqrt{5}}{2} < 0.264$, d'où $0.26 < \frac{5 - 2\sqrt{5}}{2} < 0.27$

[Ajouter un commentaire](#)

Commentaires

Moctar greve (non vérifié)

mer, 09/25/2019 - 23:51

[permalien](#)

[Machalah](#)

Machalah

[répondre](#)

Moctar greve (non vérifié)

mer, 09/25/2019 - 23:51

[permalien](#)

[Machalah](#)

Machalah

[répondre](#)

babacar diagne (non vérifié)

mar, 10/01/2019 - 23:36

je suis très content pour ce