Résumé de Cours : Calcul vectoriel dans le plan

I) Vecteurs du plan :

Soient A et B deux points du plan (P) :

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par trois données :

- Une direction : celle d'une droite (AB)
- Un sens de parcours (dans la direction de la droite);
- Une norme (ou longueur) et on note : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

II) L'égalité de deux vecteurs et Propriétés :

1) Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme

2) $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si $A = B$.

3) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ (L'opposé du vecteur)

4) Pour tout point A du plan $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (le vecteur nul)

5) Soient A ; B; C ; D des points du plan (P) tel que $A \neq B$ et $C \neq D$:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ Signifie que : ABDC est un parallélogramme

6) Soient A ; B ; C ; D des points du plan (P)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ Si et seulement si : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

7) Etant donné un point A et un vecteur $\vec{u}$; il existe un point M unique tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

III) Somme de deux vecteurs et Relation de Chasles :

1) Soit A, B, C trois points du plan. On a la relation suivante : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (Relation de Chasles)

***Remarque* :** Cette relation de Chasles s'utilise de trois manières différentes :

- Tout d'abord, c'est cette relation qui définit la somme de deux vecteurs.
- Cette relation permet de réduire des sommes vectorielles
- Cette relation permet dans les démonstrations d'intercaler des points dans des écritures vectorielles

2) Règle du parallélogramme : Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et A un point du plan

Il existe un point B unique tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et il existe un point C unique tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ tel que ABDC est un parallélogramme

Remarque : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan

La différence de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égale à la somme de $\vec{u}$ et $(-\vec{v})$ on écrit : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

IV) La multiplication d'un vecteur par un réel :

$\vec{u}$ Un vecteur non nul et un nombre non nul k, on appelle produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre k est le vecteur $k \cdot \vec{u}$ ayant les caractéristiques suivantes:

$k \cdot \vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction, même sens si $k \succ 0$ et de sens contraire si $k \prec 0$

***Remarques* :** $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$ et $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$, $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$

Si $k \cdot \vec{u} = \vec{0}$ alors k=0 ou $\vec{u} = \vec{0}$

***Propriétés* :** Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et les nombres a et b dans $\mathbb{R}$:

1) $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ 2) $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

3) $a(b\vec{u}) = (a \times b)\vec{u}$ 4) $1\vec{u} = \vec{u}$

5) $a(\vec{u} - \vec{v}) = a\vec{u} - a\vec{v}$ 6) $(a - b)\vec{u} = a\vec{u} - b\vec{u}$

V) La colinéarité de deux vecteurs :

1) Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarque : Deux vecteurs non nuls sont colinéaires ssi ils ont la même direction.

2) Propriétés :

a) Trois points A, B et C du plan sont alignés si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

b) Soit (AB) une droite. Alors $M \in (D)$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

c) Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

VI) Milieu d'un segment :

1) Soient A, B et I trois points du plan.

Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

a) I est le milieu du segment [AB]. b) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

c) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

2) Propriété Caractérisation du milieu :

Soient A, B et I trois points du plan.

I est le milieu du segment [AB] signifie que : pour tout point M on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Euclide ; dit parfois **Euclide d'Alexandrie**, est un mathématicien de la Grèce antique, auteur d'*éléments de mathématiques*, qui constituent l'un des textes fondateurs de cette discipline en Occident. Aucune information fiable n'est parvenue sur la vie ou la mort d'Euclide ; il est possible qu'il ait vécu vers 300 avant notre ère.

Son ouvrage le plus célèbre, les *Éléments*, est un des plus anciens traités connus présentant de manière systématique, à partir d'axiomes et de postulats, un large ensemble de théorèmes accompagnés de leurs démonstrations. Il porte sur la géométrie, tant plane que solide, et l'arithmétique théorique. L'ouvrage a connu des centaines d'éditions en toutes langues et ses thèmes restent à la base de l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire dans de nombreux pays.

Du nom d'Euclide dérivent en particulier l'algorithme d'Euclide

La géométrie euclidienne ou non euclidienne, et la division euclidienne.