

Série N°1 : L'ordre dans : \mathbb{R}

Exercice1 : (**) Comparer les nombres a et b dans les cas suivants :

1) $\frac{-3}{7}$ et $\frac{-3}{4}$ 2) $\frac{-\sqrt{2}}{7}$ et $\frac{1}{2}$ 3) $2\sqrt{10}$ et $3\sqrt{5}$

4) $a=3\sqrt{2}+1$ et $b=4\sqrt{2}-1$ 5) $a=\sqrt{13}$ et $b=\sqrt{2}+\sqrt{11}$ 6) $b=5\sqrt{3}+\sqrt{113}$ et $a=8+\sqrt{113}$

Exercice2 : (**) $a \in \mathbb{R}$ Comparer $20a-4$ et $25a^2$

Exercice3 : (**) Comparer $a=9^7$ et $b=\sqrt{9^{14}+1}$

Exercice4 : (**) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; On pose : $a=\sqrt{9n^2+4}$ et $a=3n+2$

Comparer les nombres : a et b

Exercice5 : (**) Soient : $a ; b$ des réels strictement positifs tel que : $\frac{a}{b} \leq 1$.

Montrer que : $\frac{a}{b} \leq \frac{a+2}{b+2}$.

Exercice6 : (**) Soient $a \in \mathbb{R}^{**}$ et $b \in \mathbb{R}^{**}$ Comparer : $x = \frac{2a+3b}{2a}$ et $y = \frac{12b}{2a+3b}$

Exercice7 : (**) Soit x un élément de l'intervalle $\left[\frac{-5}{3}; +\infty\right[$

Comparer : 11 et $-3x + \frac{1}{2}$ en utilisant les propriétés de l'ordre.

Exercice8 : (**) Calculer les expressions suivantes (éliminer le signe de la valeur absolue).

1) $\left|-3 + \frac{1}{2}\right|$ 2) $\left|\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right|$ 3) $|\sqrt{3}-11|$ 4) $|2\sqrt{5}-3\sqrt{3}|$

5) $A = |5-2\sqrt{3}| + |6-4\sqrt{3}| - |2\sqrt{3}-1|$

Exercice9 : (Résoudre les équations suivantes : 1) $|x-1|=2$ 2) $|3x+2|=|x-4|$

3) $3|x+5| = -\frac{1}{2}$ 4) $|x-1| + |2-x| - 3 = 0$

Exercice10 : (**) 1) Calculer $(6\sqrt{2}-9)^2$ et comparer : $6\sqrt{2}$ et 9 .

2) Simplifier $\sqrt{153-108\sqrt{2}}$.

Exercice11 : (*) Compléter les expressions suivantes à l'aide des symboles : $\in ; \notin ; \subset ; \not\subset$:

$2 \dots [2; 6[; 6 \dots [2; 6[; 3 \dots [1; +\infty[; 100 \dots [0; +\infty[; -1 \dots]-\infty; 1]; \left\{0; \frac{1}{2}; 1; 2\right\} \dots [0; 3[$

$\{0; 1; 200\} \dots]0; +\infty[;]0; 1[\dots \mathbb{Q}$.

Exercice12 : (**) Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x \geq -2 \\ x > 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > 6 \\ x \leq 2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \geq -1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -2 \leq x \leq 5 \\ -5 < x < 6 \end{cases}$

Exercice13 : (**) x est un réel tel que : $x \in [-2; 3]$

On pose : $A = -5x + \frac{1}{2}$. Trouver un encadrement de A et trouver son amplitude

Exercice14 : (*) On considère l'intervalle $I = [-8; 2]$; Trouver le milieu et l'amplitude et le rayon de l'intervalle I

Exercice15 : (**) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que : $\left| x - \frac{7}{2} \right| < \frac{1}{2}$; Trouver l'intervalle qui correspond à cette inégalité.

Exercice16 : (**) Résoudre les inéquations suivantes : 1) $|x| \leq \frac{1}{2}$ 2) $|2x-3| < 1$ 3) $|x+3| > \frac{4}{7}$

Exercice17 : (***) Soient a et b deux réels tels que : $\left| \frac{3a-11}{a-2} \right| < 2$ et $\left| \frac{2b-3}{b+1} - 5 \right| < 2$

1) Montrer que : $3 < a < 7$ et $-6 < b < -2$

2) Encadrer les nombres : $a+b+1$ et ab

3) En déduire une comparaison des deux nombres : $2a+b$ et $\sqrt{2a^2+b^2+3ab}$

Exercice18 : (**) Sachant que : $\frac{1}{3}$ est une valeur approchée du réel a à $\frac{2}{3}$ près

Et 2,25 est une valeur approchée du réel b à 5×10^{-2} près

1) Donner un encadrement des réels a et b

2) Donner un encadrement des réels suivants a) $a+b$ b) $a-b$ c) $A = \frac{a+1}{a^2+a+2}$

Exercice19 : (***) Soient a et b deux réels tel que : $a \in [0; 2]$ et $b \in [0; 2]$

1) Montrer que : $\frac{3}{16} |a-b| \leq \left| \frac{3}{2+a} - \frac{3}{2+b} \right| \leq \frac{3}{4} |a-b|$

2) Sachant que : $0.866 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 0.867$ et $0.707 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0.708$

Donner une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ par défaut et excès à 2×10^{-3} près

3) En déduire que : $\left| \frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}} \right| \leq 1,2 \times 10^{-1}$

Exercice20 : (***) 1) Montrer que : $\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}} + \sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}} = \sqrt{6+\sqrt{5}}$

2) Montrer que : $\sqrt{9-\sqrt{79}} + \sqrt{9+\sqrt{79}} = \sqrt{18+\sqrt{8}}$

Exercice21 : (**) Soient $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$ tel que : 1,5 est une valeur approchée par excès de x à 0,1 près

Et -1,4 est une valeur approchée par défaut de y à 0,2 près

1) Donner un encadrement de $x-y$ en précisant son amplitude.

2) Montrer que : $\frac{11}{4}$ est une valeur approchée de : $x-y$ à $\frac{3}{20}$ près

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien



Correction Série N°1 : L'ordre dans \mathbb{R}

Exercice 1 : (**) Comparer les nombres a et b dans les cas suivants :

1) $\frac{-3}{7}$ et $\frac{-3}{4}$ 2) $\frac{-\sqrt{2}}{7}$ et $\frac{1}{2}$ 3) $2\sqrt{10}$ et $3\sqrt{5}$

4) $a = 3\sqrt{2} + 1$ et $b = 4\sqrt{2} - 1$ 5) $a = \sqrt{13}$ et $b = \sqrt{2} + \sqrt{11}$ 6) $b = 5\sqrt{3} + \sqrt{113}$ et $a = 8 + \sqrt{113}$

Correction : On va étudier le signe de la différence :

1) On compare $\frac{-3}{7}$ et $\frac{-3}{4}$: On va étudier le signe de la différence :

$$\frac{-3}{7} - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{-3}{7} + \frac{3}{4} = \frac{-12 + 21}{28} = \frac{9}{28} > 0$$

Donc $\frac{-3}{7} > -\frac{3}{4}$ ou $\frac{-3}{7} \geq -\frac{3}{4}$

2) On compare $\frac{-\sqrt{2}}{7}$ et $\frac{1}{2}$: on a : $\frac{-\sqrt{2}}{7} < 0$ et $\frac{1}{2} > 0$

Donc : $\frac{-\sqrt{2}}{7} < \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} \geq \frac{-\sqrt{2}}{7}$

3) On compare $2\sqrt{10}$ et $3\sqrt{5}$: On a : $(3\sqrt{5})^2 = 45$ et $(2\sqrt{10})^2 = 40$ et $45 - 40 = 5 > 0$

Et puisque $2\sqrt{10}$ et $3\sqrt{5}$ sont positifs alors : $3\sqrt{5} > 2\sqrt{10}$

4) $a = 3\sqrt{2} + 1$ et $b = 4\sqrt{2} - 1$: $a - b = 3\sqrt{2} + 1 - (4\sqrt{2} - 1) = 3\sqrt{2} + 1 - 4\sqrt{2} + 1$

Donc : $a - b = 2 - \sqrt{2}$ et on a : $2 > \sqrt{2}$ car $(2)^2 = 4$ et $(\sqrt{2})^2 = 2$

Donc : $a - b = 2 - \sqrt{2} > 0$

Ce qui signifie que : $a - b \in \mathbb{R}^{**}$ par suite : $a > b$

5) Comparons : $a = \sqrt{13}$ et $b = \sqrt{2} + \sqrt{11}$

Puisque : $a = \sqrt{13}$ et $b = \sqrt{2} + \sqrt{11}$ sont positifs on va comparer leurs carrés :

$$a^2 = (\sqrt{13})^2 = 13$$

$$b^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{11})^2 = \sqrt{2}^2 + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{11} + (\sqrt{11})^2 = 13 + 2\sqrt{22}$$

Puisque : $2\sqrt{22} > 0$ alors : $13 + 2\sqrt{22} > 0 + 13$ c'est-à-dire : $b^2 > a^2$

Conclusion : $b > a$

6) Comparons : $a = 8 + \sqrt{113}$ et $b = 5\sqrt{3} + \sqrt{113}$

Il suffit de comparer : 4 et $3\sqrt{2}$

Puisque : 4 et $3\sqrt{2}$ sont positifs on va comparer leurs carrés :

On a $(5\sqrt{3})^2 = 75$ et $(8)^2 = 64$ donc : $5\sqrt{3} > 8$

On a donc : $5\sqrt{3} + \sqrt{113} > 8 + \sqrt{113}$

Conclusion : $b > a$

Exercice2 : (**) $a \in \mathbb{R}$ Comparer $20a - 4$ et $25a^2$

Correction : $25a^2 - (20a - 4) = 25a^2 - 20a + 4 = (5a)^2 - 2 \times 5a \times 2 + 2^2 = (5a - 2)^2 \geq 0$

Car : le carré est toujours positif.

Donc : $25a^2 \geq 20a - 4$ si $a \in \mathbb{R}$

Exercice3 : (**) Comparer $a = 9^7$ et $b = \sqrt{9^{14} + 1}$

Correction: On a: $9^{14} + 1 = (9^7)^2 + 1$

On a: $(9^7)^2 < (9^7)^2 + 1$ car $(9^7)^2 + 1 - (9^7)^2 = 1 > 0$

Donc : $\sqrt{(9^7)^2} < \sqrt{(9^7)^2 + 1}$

Donc : $9^7 < \sqrt{(9^7)^2 + 1}$

Donc : $a < b$

Exercice4 : (**) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; On pose : $a = \sqrt{9n^2 + 4}$ et $b = 3n + 2$

Comparer les nombres : a et b

Correction : Pour comparer deux nombres positifs on compare leurs carrés :

On a: $a^2 = (\sqrt{9n^2 + 4})^2 = 9n^2 + 4$ et $b^2 = (3n + 2)^2 = 9n^2 + 12n + 4$

$b^2 - a^2 = 9n^2 + 12n + 4 - (9n^2 + 4)$

$b^2 - a^2 = 9n^2 + 12n + 4 - 9n^2 - 4 = 12n > 0$ Car $n \in \mathbb{N}^*$

Donc : $b^2 > a^2$ et par suite $b > a$; car $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$

Exercice5 : (**) Soient : a, b des réels strictement positifs tel que : $\frac{a}{b} \leq 1$.

Montrer que : $\frac{a}{b} \leq \frac{a+2}{b+2}$.

Correction : Comparer $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+2}{b+2}$ revient à étudier le signe de : $\frac{a+2}{b+2} - \frac{a}{b}$.

$$\frac{a+2}{b+2} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+2) - a(b+2)}{b(b+2)} = \frac{ba + 2b - ab - 2a}{b(b+2)}$$

Donc : $\frac{a+2}{b+2} - \frac{a}{b} = \frac{2b - 2a}{b(b+2)} = \frac{2(b-a)}{b(b+2)}$ et puisque : b et 2 des réels strictement positifs

Alors : $b(b+2) > 0$ et on a aussi : $\frac{a}{b} \leq 1$

Donc : $b \times \frac{a}{b} \leq b \times 1$ c'est à dire : $a \leq b$

Par suite : $0 \leq b - a$.

Donc : $\frac{a+2}{b+2} - \frac{a}{b} \geq 0$ et par conséquent : $\frac{a+2}{b+2} \geq \frac{a}{b}$.

Exercice6 : (**) Soient $a \in \mathbb{R}^{**}$ et $b \in \mathbb{R}^{**}$ Comparer : $x = \frac{2a+3b}{2a}$ et $y = \frac{12b}{2a+3b}$

Correction : On a : $x - y = \frac{2a+3b}{2a} - \frac{12b}{2a+3b}$

Donc : $x - y = \frac{(2a+3b)^2 - 24a \times b}{2a(2a+3b)}$

$$\text{Donc : } x - y = \frac{4a^2 + 12ab + 9b^2 - 24a \times b}{2a(2a + 3b)}$$

$$\text{Donc : } x - y = \frac{4a^2 - 12a \times b + 9b^2}{2a(2a + 3b)} = \frac{(2a)^2 - 2 \times 2a \times 3b + (3b)^2}{2a(2a + 3b)}$$

$$\text{Donc : } x - y = \frac{(2a - 3b)^2}{2a(2a + 3b)} \in \mathbb{R}^+ \quad \text{Car : } 2a(2a + 3b) \in \mathbb{R}^{**} \quad \text{et } (2a - 3b)^2 \in \mathbb{R}^+$$

D'où : $x \geq y$

Exercice 7 : (**) Soit x un élément de l'intervalle $\left[\frac{-5}{3}; +\infty \right[$

Comparer : 11 et $-3x + \frac{1}{2}$ en utilisant les propriétés de l'ordre.

Correction : On a $x \in \left[\frac{-5}{3}; +\infty \right[$ donc : $x \geq \frac{-5}{3}$

$$\text{Donc : } x \times (-3) \leq \frac{-5}{3} \times (-3) \quad \text{c'est à dire : } -3x \leq 5$$

$$\text{Donc : } -3x + \frac{1}{2} \leq 5 + \frac{1}{2} \quad \text{c'est à dire : } -3x + \frac{1}{2} \leq \frac{11}{2}$$

$$\text{Donc : } \textcircled{1} -3x + \frac{1}{2} \leq \frac{11}{2} \quad \text{et on sait que : } \frac{11}{2} < 11 \textcircled{2}$$

$$\text{Donc : de } \textcircled{1} \text{ et } \textcircled{2} \text{ en déduit que : } -3x + \frac{1}{2} < 11$$

Exercice 8 : (**) Calculer les expressions suivantes (éliminer le signe de la valeur absolue).

$$1) \left| -3 + \frac{1}{2} \right| \quad 2) \left| \sqrt{5} + \frac{1}{2} \right| \quad 3) \left| -\sqrt{3} - 11 \right| \quad 4) \left| 2\sqrt{5} - 3\sqrt{3} \right|$$

$$5) A = |5 - 2\sqrt{3}| + |6 - 4\sqrt{3}| - |2\sqrt{3} - 1|$$

$$\text{Correction : 1) } \left| -3 + \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{5}{2} \right| = -\left(-\frac{5}{2} \right) = \frac{5}{2}$$

$$2) \left| \sqrt{5} + \frac{1}{2} \right| = \sqrt{5} + \frac{1}{2} \quad \text{car } \sqrt{5} + \frac{1}{2} > 0$$

$$3) \left| -\sqrt{3} - 11 \right| = \left| -(\sqrt{3} + 11) \right| = \left| \sqrt{3} + 11 \right| \quad \text{car } |-X| = |X|$$

$$\text{Donc : } \left| -\sqrt{3} - 11 \right| = \left| \sqrt{3} + 11 \right| = \sqrt{3} + 11 \quad \text{car : } \sqrt{3} + 11 > 0$$

$$4) \left| 2\sqrt{5} - 3\sqrt{3} \right|$$

On compare : $2\sqrt{5}$ et $3\sqrt{3}$

$$\text{On a : } (2\sqrt{5})^2 = 20 \text{ et } (3\sqrt{3})^2 = 27 \quad \text{donc } 3\sqrt{3} > 2\sqrt{5}$$

$$\text{Par suite } (2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}) \in \mathbb{R}^- \quad \text{Donc } \left| 2\sqrt{5} - 3\sqrt{3} \right| = -(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$$

$$5) A = |5 - 2\sqrt{3}| + |6 - 4\sqrt{3}| - |2\sqrt{3} - 1|$$

$$\text{On a : } (2\sqrt{3})^2 = 12 \text{ et } (5)^2 = 25 \quad \text{donc } 5 > 2\sqrt{3} \quad \text{par suite } (5 - 2\sqrt{3}) \in \mathbb{R}^{**}$$

$$\text{Donc : } |5 - 2\sqrt{3}| = 5 - 2\sqrt{3}$$

On a : $(4\sqrt{3})^2 = 48$ et $(6)^2 = 36$ donc $5 > 2\sqrt{3}$ par suite $(6 - 4\sqrt{3}) \in \mathbb{R}^-$

Donc : $|6 - 4\sqrt{3}| = -(6 - 4\sqrt{3})$

On a : $(2\sqrt{3})^2 = 12$ et $1^2 = 1$ donc $2\sqrt{3} > 1$ par suite $(2\sqrt{3} - 1) \in \mathbb{R}^{++}$

Donc : $|2\sqrt{3} - 1| = 2\sqrt{3} - 1$

Donc : $A = 5 - 2\sqrt{3} - (6 - 4\sqrt{3}) - (2\sqrt{3} - 1)$

Donc : $A = 5 - 2\sqrt{3} - 6 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 1$

Donc : $A = 0$

Exercice 9 : (Résoudre les équations suivantes : 1) $|x - 1| = 2$ 2) $|3x + 2| = |x - 4|$

3) $3|x + 5| = -\frac{1}{2}$ 4) $|x - 1| + |2 - x| - 3 = 0$

Correction : 1) $|x - 1| = 2$ Signifie que : $x - 1 = 2$ ou $x - 1 = -2$

Signifie que : $x = 3$ ou $x = -1$ Donc : $S = \{-1, 3\}$

2) $|3x + 2| = |x - 4|$ signifie que : $3x + 1 = x - 4$ ou $3x + 2 = -(x - 4)$

Signifie que : $3x + 1 = x - 4$ ou $3x + 2 = -x + 4$

Signifie que : $2x = -5$ ou $4x = 2$

Signifie que : $x = -\frac{5}{2}$ ou $x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Donc : $S = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

3) $3|x + 5| = -\frac{1}{2}$ Signifie que : $|x + 5| = -\frac{1}{6}$

$S = \emptyset$ Car $|x + 5| \geq 0$ et $-\frac{1}{6} < 0$

4) $|x - 1| + |3 - x| - 3 = 0$

$x - 1 = 0$ Signifie que : $x = 1$

$3 - x = 0$ Signifie que : $x = 3$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+	+
$ x - 1 $	$-x + 1$	0	$x - 1$	$x - 1$
$3 - x$	+	+	0	-
$ 3 - x $	$3 - x$	$3 - x$	0	$x - 3$
$ x - 1 + 3 - x - 3$	$1 - 2x$	-1	$2x - 7$	

Si : $x \leq 1$ alors : L'équation $|x - 1| + |3 - x| - 3 = 0$ devient : $-(x - 1) + (3 - x) - 3 = 0$

Ce qui signifie que : $4 - 2x - 3 = 0$

Ce qui signifie que : $x = \frac{1}{2} \leq 1$; Donc : $S_1 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Si : $1 \leq x \leq 3$ alors l'équation devient : $(x - 1) + (3 - x) - 3 = 0$

Ce qui signifie que : $-1 = 0$ Donc : $S_2 = \emptyset$

Si : $x \geq 3$ alors l'équation devient : $(x-1) - (3-x) - 3 = 0$

Ce qui signifie que : $2x - 7 = 0$

Ce qui signifie que : $x = \frac{7}{2} \geq 3$ Donc : $S_3 = \left\{ \frac{7}{2} \right\}$

Par conséquent : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{7}{2} \right\}$

Exercice10 : (**) 1) Calculer $(6\sqrt{2} - 9)^2$ et comparer : $6\sqrt{2}$ et 9.

2) Simplifier $\sqrt{153 - 108\sqrt{2}}$.

Correction : 1) $(6\sqrt{2} - 9)^2 = (6\sqrt{2})^2 - 2 \times 6\sqrt{2} \times 9 + 9^2 = 72 - 108\sqrt{2} + 81$

Donc : $(6\sqrt{2} - 9)^2 = 153 - 108\sqrt{2}$

On a : $(6\sqrt{2})^2 = 72$ et $9^2 = 81$ donc $9 > 6\sqrt{2}$ Par suite : $6\sqrt{2} - 9 \in \mathbb{R}^-$

2) $\sqrt{153 - 108\sqrt{2}} = \sqrt{(6\sqrt{2} - 9)^2} = |6\sqrt{2} - 9| = -(6\sqrt{2} - 9)$ car $6\sqrt{2} - 9 \in \mathbb{R}^-$

Par suite : $\sqrt{153 - 108\sqrt{2}} = 9 - 6\sqrt{2}$

Exercice11 : (*) Compléter les expressions suivantes à l'aide des symboles : \in ; \notin ; \subset ; $\not\subset$:

$2 \dots [2; 6[$; $6 \dots [2; 6[$; $3 \dots [1; +\infty[$; $100 \dots [0; +\infty[$; $-1 \dots]-\infty; 1]$; $\left\{ 0; \frac{1}{2}; 1; 2 \right\} \dots [0; 3[$

$\{0; 1; 200\} \dots]0; +\infty[$; $]0; 1[\dots \mathbb{Q}$.

Correction : $2 \in [2; 6[$; $6 \notin [2; 6[$; $3 \in [1; +\infty[$; $100 \in [0; +\infty[$; $-1 \notin]-\infty; 1]$; $\left\{ 0; \frac{1}{2}; 1; 2 \right\} \subset [0; 3[$

$\{0; 1; 200\} \not\subset]0; +\infty[$ car $0 \in \{0; 1; 200\}$ et $\notin]0; +\infty[$; $]0; 2[\not\subset \mathbb{Q}$ car $\sqrt{2} \in]0; 2[$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Exercice12 : (**) Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x \geq -2 \\ x > 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > 6 \\ x \leq 2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \geq -1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -2 \leq x \leq 5 \\ -5 < x < 6 \end{cases}$

Correction : $\left\{ \begin{array}{l} \text{c'est l'intersection} \\ 1) \begin{cases} x \geq -2 \\ x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$

$x \geq -2$ Signifie que : $x \in [-2, +\infty[$

Et $x > 0$ Signifie que : $x \in]0, +\infty[$

Donc : $S =]0, +\infty[\cap [-2, +\infty[=]0, +\infty[$

2) $\begin{cases} x > 6 \\ x \leq 2 \end{cases}$ On a : $x \leq 2$ Signifie que : $x \in]-\infty, 2]$

Et $x > 6$ Signifie que : $x \in]6, +\infty[$

Donc : $S =]6, +\infty[\cap]-\infty, 2] = \emptyset$

3) $\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \geq -1 \end{cases}$; $x > \frac{1}{2}$ Signifie que : $x \in \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$

Et $x \geq -1$ Signifie que : $x \in [-1, +\infty[$

$$\text{Donc : } S = \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[\cap \left[-1, +\infty \right[= \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$$

$$4) \begin{cases} -2 \leq x \leq 7 \\ -5 < x < 6 \end{cases}$$

$$-2 \leq x \leq 7 \quad \text{Signifie que : } x \in [-2; 7]$$

$$-5 < x < 6 \quad \text{Signifie que : } x \in]-5; 6[$$

$$\text{Donc : } S =]-5; 6[\cap [-2; 7] = [-2; 6[$$

Exercice13 : (**) x est un réel tel que : $x \in [-2; 3]$

On pose : $A = -5x + \frac{1}{2}$. Trouver un encadrement de A et trouver son amplitude

Correction : $x \in [-2; 3]$ Signifie que : $-2 \leq x \leq 3$

Signifie que : $-15 \leq -5x \leq 10$

$$\text{Signifie que : } -15 + \frac{1}{2} \leq -5x + \frac{1}{2} \leq 10 + \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } -\frac{29}{2} \leq A \leq \frac{21}{2} : \text{ encadrement de } A$$

$$\frac{21}{2} - \left(-\frac{29}{2}\right) = \frac{21}{2} + \frac{29}{2} = \frac{50}{2} = 25 : \text{ est l'amplitude de l'encadrement}$$

Exercice14 : (*) On considère l'intervalle $I = [-8; 2]$; Trouver le milieu et l'amplitude et le rayon de l'intervalle I

Correction : $\frac{-8+2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ Est le milieu de l'intervalle I .

$2 - (-8) = 10$ Est l'amplitude de l'intervalle I .

$$\frac{2 - (-8)}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ Est le rayon de l'intervalle } I.$$

Exercice15 : (**) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que : $\left| x - \frac{7}{2} \right| < \frac{1}{2}$; Trouver l'intervalle qui correspond à cette inégalité.

Correction : $(x \in \mathbb{R} \text{ et } \left| x - \frac{7}{2} \right| < \frac{1}{2})$

$$\text{Signifie : } -\frac{1}{2} < x - \frac{7}{2} < \frac{1}{2} \quad \text{Signifie : } -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} < x - \frac{7}{2} + \frac{7}{2} < \frac{1}{2} + \frac{7}{2}$$

$$\text{Signifie : } 3 < x < 4$$

C'est-à-dire : $x \in]3, 4[$

Donc : $(x \in \mathbb{R} \text{ et } \left| x - \frac{7}{2} \right| < \frac{1}{2})$ signifie (x appartient à l'intervalle ouvert de centre $c = \frac{7}{2}$ et de rayon $r = \frac{1}{2}$)

Exercice16 : (**) Résoudre les inéquations suivantes : 1) $|x| \leq \frac{1}{2}$ 2) $|2x - 3| < 1$ 3) $|x + 3| > \frac{4}{7}$

Correction : 1) $|x| \leq \frac{1}{2}$ Signifie que : $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

$$\text{Donc : } S = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$$

2) $|2x - 3| < 1$ Signifie $-1 < 2x - 3 < 1$

$$\text{Signifie que : } -1 + 3 < 2x - 3 + 3 < 1 + 3 \quad \text{Signifie que : } 2 < 2x < 4$$

$$\text{Signifie } 2 \times \frac{1}{2} < 2x < 4 \times \frac{1}{2}$$

C'est-à-dire que : $1 < x < 2$ donc : $S =]1; 2[$

$$3) |x+3| > \frac{4}{7} \quad \text{Signifie } x+3 > \frac{4}{7} \text{ ou } x+3 < -\frac{4}{7}$$

$$\text{Signifie } x > \frac{4}{7} - 3 \text{ ou } x < -\frac{4}{7} - 3$$

$$\text{Signifie } x > -\frac{17}{7} \text{ ou } x < -\frac{25}{7}$$

$$\text{Donc } S =]-\infty; -\frac{25}{7}[\cup]-\frac{17}{7}; +\infty[$$

Exercice 17 : (***) Soient a et b deux réels tels que : $\left| \frac{3a-11}{a-2} \right| < 2$ et $\left| \frac{2b-3}{b+1} - 5 \right| < 2$

1) Montrer que : $3 < a < 7$ et $-6 < b < -2$

2) Encadrer les nombres : $a+b+1$ et ab

3) En déduire une comparaison des deux nombres : $2a+b$ et $\sqrt{2a^2+b^2+3ab}$

Corrigé :

1) a) Montrons que : $3 < a < 7$

$$\text{On a : } \left| \frac{3a-11}{a-2} \right| < 2 \text{ donc : } -2 < \frac{3a-11}{a-2} < 2$$

$$\text{Donc : } -2 < \frac{3a-6+6-11}{a-2} < 2$$

$$\text{Donc : } -2 < \frac{3(a-2)-5}{a-2} < 2 \text{ c'est-à-dire : } -2 < \frac{3(a-2)}{a-2} - \frac{5}{a-2} < 2$$

$$\text{Donc : } -2 < 3 - \frac{5}{a-2} < 2 \text{ c'est-à-dire : } -2-3 < -\frac{5}{a-2} < 2-3$$

$$\text{Donc : } -5 < -\frac{5}{a-2} < -1 \text{ c'est-à-dire : } 1 < \frac{5}{a-2} < 5$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{5} < \frac{a-2}{5} < 1 \text{ c'est-à-dire : } 1 < a-2 < 5$$

$$\text{Donc : } \boxed{3 < a < 7}$$

b) Montrons que : $-6 < b < -2$

$$\text{On a : } \left| \frac{2b-3}{b+1} - 5 \right| < 2 \text{ donc : } -2 < \frac{2b-3}{b+1} - 5 < 2$$

$$\text{Donc : } -2 < \frac{2(b+1)-2-3}{b+1} - 5 < 2$$

$$\text{Donc : } -2 < \frac{2(b+1)}{b+1} - \frac{5}{b+1} - 5 < 2 \text{ c'est-à-dire : } -2 < 2 - \frac{5}{b+1} - 5 < 2$$

$$\text{Donc : } -2 < -\frac{5}{b+1} - 3 < 2 \text{ c'est-à-dire : } 1 < -\frac{5}{b+1} < 5$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{5} < -\frac{b+1}{5} < 1 \text{ c'est-à-dire : } -1 < \frac{b+1}{5} < -\frac{1}{5}$$

$$\text{Donc : } -5 < b+1 < -1 \text{ c'est-à-dire : } \boxed{-6 < b < -2}$$

2) a) Encadrement du nombre : $a+b+1$

$$\text{On a : } 3 < a < 7 \text{ et } -6 < b < -2$$

$$\text{Donc : } 3 + (-6) < a+b < 7 + (-2)$$

$$\text{Donc : } -3 < a+b < 5$$

$$\text{Donc : } -3+1 < a+b+1 < 5+1$$

$$\text{Donc : } \boxed{-2 < a+b+1 < 6}$$

b) Encadrement du nombre : ab

On a : $3 < a < 7$ et $-6 < b < -2$

Donc : $3 < a < 7$ et $2 < -b < 6$

Donc : $6 < -ab < 42$

Donc : $\boxed{-42 < ab < -6}$

3) Dédions une comparaison des deux nombres : $2a+b$ et $\sqrt{2a^2+b^2+3ab}$

On a : $3 < a < 7$ donc $6 < 2a < 14$ et $-6 < b < -2$

$0 < 2a+b < 12$

Donc : $2a+b$ est positif et $\sqrt{2a^2+b^2+3ab}$ est positif aussi

On va comparer leurs carrés :

$$(2a+b)^2 - \sqrt{2a^2+b^2+3ab}^2 = 4a^2 + 4ab + b^2 - 2a^2 - b^2 - 3ab = 2a^2 + ab = a(2a+b)$$

Or : $2a+b$ est positif et a est positif donc $a(2a+b) > 0$

Par suite : $(2a+b)^2 - \sqrt{2a^2+b^2+3ab}^2 > 0$

Alors : $\boxed{2a+b > \sqrt{2a^2+b^2+3ab}}$

Exercice 18 : (**) Sachant que : $\frac{1}{3}$ est une valeur approchée du réel a à $\frac{2}{3}$ près

Et 2,25 est une valeur approchée du réel b à 5×10^{-2} près

1) Donner un encadrement des réels a et b

2) Donner un encadrement des réels suivants a) $a+b$ b) $a-b$ c) $A = \frac{a+1}{a^2+a+2}$

Correction : 1) a) On a : $\frac{1}{3}$ est une valeur approchée du réel a à $\frac{2}{3}$ près donc : $\left| a - \frac{1}{3} \right| < \frac{2}{3}$

$$\left| a - \frac{1}{3} \right| < \frac{2}{3} \text{ Signifie que : } -\frac{2}{3} < a - \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$$

$$\text{Signifie que : } -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} < a - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} < \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\text{Signifie que : } \boxed{-\frac{1}{3} < a < 1}$$

b) 2,25 est une valeur approchée du réel b à 5×10^{-2} près donc : $|b - 2,25| < 5 \times 10^{-2}$

$$|b - 2,25| < 5 \times 10^{-2} \text{ Signifie que : } -5 \times 10^{-2} < b - 2,25 < 5 \times 10^{-2}$$

$$\text{Signifie que : } -5 \times 10^{-2} + 2,25 < b < 5 \times 10^{-2} + 2,25$$

$$\text{Signifie que : } \boxed{2,2 < b < 2,3}$$

2)a) On a : $-\frac{1}{3} < a < 1$ et $2,2 < b < 2,3$ donc : $-\frac{1}{3} + 2,2 < a+b < 1+2,3$

$$\text{Donc : } -\frac{1}{3} + 2,2 < a+b < 1+2,3$$

$$\text{Donc : } \frac{5,6}{3} < a+b < 3,3$$

$$\text{Donc : } \frac{56}{30} < a+b < 3,3 \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\frac{28}{15} < a+b < 3,3}$$

2)b) On a : $a-b = a+(-b)$ et $-\frac{1}{3} < a < 1$ et $2,2 < b < 2,3$ donc : $-2,3 < -b < -2,2$

$$\text{Donc : } -\frac{1}{3} + (-2,3) < a + (-b) < 1 + (-2,2)$$

$$\text{Donc : } \frac{-7,9}{3} < a - b < -1,2$$

$$\text{Donc : } \boxed{\frac{-79}{30} < a - b < -1,2}$$

$$\text{c) } A = (a+1) \times \frac{1}{a^2 + a + 2}$$

$$\text{On a : } -\frac{1}{3} < a < 1 \quad \text{donc : } -\frac{1}{3} + 1 < a + 1 < 1 + 1$$

$$\text{Donc : } \frac{2}{3} < a + 1 < 2$$

$$\text{On a : } \text{donc : } 0 \leq a < 1 \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{3} \leq a \leq 0$$

$$\text{Donc : } 0 \leq a^2 < 1 \quad \text{ou} \quad 0 \leq -a \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{Donc : } 0 \leq a^2 < 1 \quad \text{ou} \quad 0 \leq a^2 \leq \frac{1}{9}$$

$$\text{Donc : } \boxed{0 \leq a^2 < 1} \quad \text{et on a : } -\frac{1}{3} + 2 < a + 2 < 1 + 2$$

$$\text{Donc : } 0 \leq a^2 < 1 \quad \text{et on a : } \frac{5}{3} < a + 2 < 3$$

$$\text{Donc : } \frac{5}{3} \leq a^2 + a + 2 < 4$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{a^2 + a + 2} < \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} < a + 1 < 2$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \leq (a+1) \times \frac{1}{a^2 + a + 2} < \frac{3}{5} \times 2$$

$$\text{Donc : } \boxed{\frac{1}{6} \leq A < \frac{6}{5}}$$

Exercice 19 : (***) Soient a et b deux réels tel que : $a \in [0;2]$ et $b \in [0;2]$

$$1) \text{ Montrer que : } \frac{3}{16} |a - b| \leq \left| \frac{3}{2+a} - \frac{3}{2+b} \right| \leq \frac{3}{4} |a - b|$$

$$2) \text{ Sachant que : } 0.866 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 0.867 \quad \text{et} \quad 0.707 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0.708$$

Donner une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ par défaut et excès à 2×10^{-3} près

$$3) \text{ En déduire que : } \left| \frac{3}{2 + \frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{3}{2 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \right| \leq 1,2 \times 10^{-1}$$

$$\text{Corrigé : 1) } \left| \frac{3}{2+a} - \frac{3}{2+b} \right| = \left| \frac{3(2+b) - 3(2+a)}{(2+b)(2+a)} \right| = \left| \frac{6+3b-6-3a}{(2+b)(2+a)} \right|$$

$$\text{Donc : } \left| \frac{3}{2+a} - \frac{3}{2+b} \right| = \left| \frac{3b-3a}{(2+b)(2+a)} \right| = \left| \frac{3(b-a)}{(2+b)(2+a)} \right|$$

$$\text{Donc : } \left| \frac{3}{2+a} - \frac{3}{2+b} \right| = \frac{|3||b-a|}{|(2+b)(2+a)|} = \frac{3|a-b|}{|(2+b)(2+a)|} \quad \text{Car : } |b-a| = |a-b|$$

Or on a : $a \in [0;2]$ signifie $0 \leq a \leq 2$

Et on a : $b \in [0;2]$ signifie $0 \leq b \leq 2$

Donc : $2 \leq 2+a \leq 4$ et $2 \leq 2+b \leq 4$

Par suite : $4 \leq (2+b)(2+a) \leq 16$

C'est-à-dire : $|(2+b)(2+a)| = (2+b)(2+a)$

$$\text{Et on a aussi : } \frac{1}{16} \leq \frac{1}{(2+b)(2+a)} \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Donc : } \frac{3|a-b|}{16} \leq \frac{3|a-b|}{(2+b)(2+a)} \leq \frac{3|a-b|}{4} \quad \text{car : } 3|a-b| \geq 0$$

$$\text{Par suite : } \frac{3}{16}|a-b| \leq \left| \frac{3}{2+a} - \frac{3}{2+b} \right| \leq \frac{3}{4}|a-b|$$

$$2) \text{ On a : } 0.866 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 0.867 \quad \text{et} \quad 0.707 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0.708$$

$$\text{On a } \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{et on a : } -0.708 \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq -0.707$$

$$\text{Donc : } 0.866 - 0.708 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \leq 0.867 - 0.707$$

$$\text{Donc : } 0.158 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0.16 \quad \text{et} \quad 0.16 - 0.158 = 2 \times 10^{-3}$$

Par suite : 0,16 est une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ par excès à : 2×10^{-3} près

0,158 : Est une valeur approchée du réel $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ par défaut à : 2×10^{-3} près

$$3) \text{ D'après 1) on a } \left| \frac{3}{2+a} - \frac{3}{2+b} \right| \leq \frac{3}{4}|a-b|$$

$$\text{Donc : } \left| \frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}} \right| \leq \frac{3}{4} \left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \quad \text{et on a : } 0.158 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0.16$$

$$\text{Donc : } 0 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0.16$$

$$\text{Par suite : } \frac{3}{4} \left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \leq \frac{3}{4} \times 0.16 = 0.12$$

Finalemment : $\left| \frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}} \right| \leq 0.12$

C'est-à-dire : $\left| \frac{3}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{3}{2+\frac{\sqrt{2}}{2}} \right| \leq 1,2 \times 10^{-1}$

Exercice20 : (***) 1) Montrer que : $\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}} + \sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}} = \sqrt{6+\sqrt{5}}$

2) Montrer que : $\sqrt{9-\sqrt{79}} + \sqrt{9+\sqrt{79}} = \sqrt{18+\sqrt{8}}$

Corrigé : 1) On pose : $B = \sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}} + \sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}}$

On va Calculer B^2 : $B^2 = \left(\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}} \right)^2 + 2\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}}\sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}} + \left(\sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}} \right)^2$

$$B^2 = 6 + 2\sqrt{\frac{36-1}{4}} = 6 + 2\sqrt{\frac{5}{4}} = 6 + \sqrt{5}$$

$$B^2 = \frac{6+\sqrt{31}}{2} + 2\sqrt{\left(\frac{6+\sqrt{31}}{2}\right)\left(\frac{6-\sqrt{31}}{2}\right)} + \frac{6-\sqrt{31}}{2}$$

Donc : $B^2 = 6 + \sqrt{5}$

Donc : $B = \sqrt{6+\sqrt{5}}$ ou $B = -\sqrt{6+\sqrt{5}}$

Or $B > 0$ donc : $B = \sqrt{6+\sqrt{5}}$

D'où : $\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}} + \sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}} = \sqrt{6+\sqrt{5}}$

2) $\sqrt{9-\sqrt{79}} + \sqrt{9+\sqrt{79}} = \sqrt{18+\sqrt{8}}$??

On pose : $B = \sqrt{9-\sqrt{79}} + \sqrt{9+\sqrt{79}}$ Calculons B^2 ?

$$B^2 = \left(\sqrt{9-\sqrt{79}} \right)^2 + 2\sqrt{9-\sqrt{79}}\sqrt{9+\sqrt{79}} + \left(\sqrt{9+\sqrt{79}} \right)^2 \quad B^2 = 9 - \sqrt{79} + 2\sqrt{(9-\sqrt{79})(9+\sqrt{79})} + 9 + \sqrt{79}$$

$$B^2 = 18 + 2\sqrt{81-79} = 18 + \sqrt{8} \quad \text{Donc : } B^2 = 18 + \sqrt{8}$$

Donc : $B = \sqrt{18+\sqrt{8}}$ ou $B = -\sqrt{18+\sqrt{8}}$ Or $B > 0$ donc : $B = \sqrt{18+\sqrt{8}}$

Par suite : $\sqrt{9-\sqrt{79}} + \sqrt{9+\sqrt{79}} = \sqrt{18+\sqrt{8}}$

Exercice21 : (**) Soient $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$ tel que : 1,5 est une valeur approchée par excès de x à 0,1 près

Et -1,4 est une valeur approchée par défaut de y à 0,2 près

1) Donner un encadrement de $x - y$ en précisant son amplitude.

2) Montrer que : $\frac{11}{4}$ est une valeur approchée de : $x - y$ à $\frac{3}{20}$ près

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

