Tronc commun Sciences BIOF

Série N°1 : Arithmétique dans IN

Exercice1 : Compléter les expressions suivantes à l'aide des symboles : $\in$; $\notin$; $\subset$; $\not\subset$

$-4...\mathbb{N}$; $\frac{2}{3}...\mathbb{N}$; $\sqrt{2}...\mathbb{N}$; $\frac{8}{2}...\mathbb{N}$; $-\frac{15}{3}...\mathbb{N}$; $12-32...\mathbb{N}$; $\sqrt{25}...\mathbb{N}$; $2,12...\mathbb{N}$; $0...\mathbb{N}^*$; $-\frac{\sqrt{100}}{3}...\mathbb{N}$

$\pi...\mathbb{N}$; $\{1;2;7\}...\mathbb{N}$; $\{4;-2;12\}...\mathbb{N}$; $\mathbb{N}^*...\mathbb{N}$; $\{0\}...\mathbb{N}$; $10...\{1;8;9;11;12\}$; $5.....\varnothing$

Exercice2 : 1) Déterminer les multiples de 9 comprises entre : 23 et 59
2) Déterminer les diviseurs de 56
3) Existe-t-il un nombre multiple de 12 et diviseur de 80

Exercice3 : 1) a) Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 72
b) Déterminer le nombre de diviseurs de 72.
c) Déterminer les diviseurs de 72
2) a) Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 60
b) Déterminer le nombre de diviseurs de 60.
c) Déterminer les diviseurs de 60
3) a) Déterminer tous les diviseurs communs à 72 et 60
b) Déterminer le : PGCD (72 ; 60)
4) a) Déterminer trois multiples communs à 72 et 60
b) Déterminer le : PPCM (72 ; 60)

Exercice4 : Déterminer la parité des nombres suivants : $n \in \mathbb{N}$

1) 375^2+648^2 2) $\left(25^3+24^3\right)^7$ 3) $2n+16$ 4) $10n+5$ 5) $n^2+11n+17$ 6) $n^2+7n+20$
7) $n^2+13n+17$ 8) $5n^2+7n+4$.

Exercice5 : Soit n est un nombre entier naturel impair
1) Vérifier que : n^2-1 est un multiple de 8 dans cas suivants : $n=1$; $n=3$; $n=5$; $n=7$
2) Montrer que : n^2-1 est un multiple de 4
3) Montrer que : n^2-1 est un multiple de 8
4) En déduire que : n^4-1 est un multiple de 16
5) Montrer que si n et m sont impairs alors : n^2+m^2+6 est un multiple de 8

Exercice6 : Soient : $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $n-1$ soit un multiple de 3.
Montrer que : n^2-1 est un entier naturel multiple de 3.

Correction : On a : $n-1$ soit un multiple de 3
Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n-1=3k$ c'est-à-dire : $n=3k+1$
Donc : $n^2-1=(3k+1)^2-1=9k^2+6k+1-1=9k^2+6k$ $n^2-1=3\left(3k^2+2k\right)=3k'$ avec : $k'=3k^2+2k \in \mathbb{N}$
Par suite : n^2-1 est un entier naturel multiple de 3

Exercice7 : Est-ce que les nombres suivants sont premiers ? Justifier votre réponse.
0 ; 17 ; 21 ; 41 ; 87 ; 105 ; 239 ; 2787 ; 191 ;1004001 et 259

Exercice8 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$ on pose : $A=7^{n+2}-7^n$; $B=2^{n+3}+2^n$
1) Décomposer A en produit de facteurs premiers puis montrer qu'il est divisible par 12
2) Décomposer B en produit de facteurs premiers puis montrer qu'il est divisible par 9
3) En déduire $A \wedge B$ et $A \vee B$

Exercice9 : Déterminer tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation :
$x^2-y^2=17$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

Tronc commun Sciences BIOF
Correction Série N°1 : Arithmétique dans IN

Exercice1 : (*) Compléter les expressions suivantes à l'aide des symboles : ∈ ; ∉ ; ⊂ ; ⊄

$-4...\mathbb{N}$; $\frac{2}{3}...\mathbb{N}$; $\sqrt{2}...\mathbb{N}$; $\frac{8}{2}...\mathbb{N}$; $-\frac{15}{3}...\mathbb{N}$; $12-32...\mathbb{N}$; $\sqrt{25}...\mathbb{N}$; $2,12...\mathbb{N}$; $0...\mathbb{N}^*$; $-\frac{\sqrt{100}}{3}...\mathbb{N}$

$\pi...\mathbb{N}$; $\{1;2;7\}...\mathbb{N}$; $\{4;-2;12\}...\mathbb{N}$; $\mathbb{N}^*...\mathbb{N}$; $\{0\}...\mathbb{N}$; $10...\{1;8;9;11;12\}$; $5.....\varnothing$

Correction : $-4.\notin\mathbb{N}$; $\frac{2}{3}\notin\mathbb{N}$; $\sqrt{2}\notin\mathbb{N}$; $\frac{8}{2}\in\mathbb{N}$; $-\frac{15}{3}\notin\mathbb{N}$; $12-32\notin\mathbb{N}$; $\sqrt{25}\in\mathbb{N}$; $2,12\notin\mathbb{N}$; $0\notin\mathbb{N}^*$; $\frac{\sqrt{100}}{2}\in\mathbb{N}$;

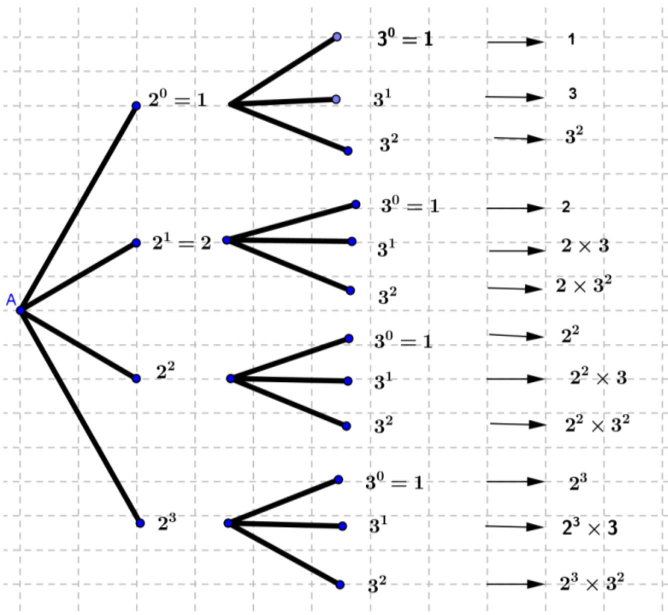
$\pi\notin\mathbb{N}$; $\{1;2;7\}\subset\mathbb{N}$; $\{4;-2;12\}\not\subset\mathbb{N}$; $\mathbb{N}^*\subset\mathbb{N}$; $\{0\}\subset\mathbb{N}$; $10\notin\{1;8;9;11;12\}$; $5\notin\varnothing$

Exercice2 : 1) Déterminer les multiples de 9 comprises entre : 23 et 59
2) Déterminer les diviseurs de 56
3) Existe-t-il un nombre multiple de 12 et diviseur de 80

Correction : 1) Soit a et b deux entiers. On dit que : a est un multiple de b s'il existe un entier k tel que a = k b.
On dit alors que b est un diviseur de a.
Les multiples de 9 s'écrivent sous la forme : $9k$ avec : $k\in\mathbb{N}$
On a donc : $23\leq 9k\leq 59$ Signifie que : $23/9\leq k\leq 59/9$
Signifie que : $2.5\leq k\leq 6.5$ donc : $k\in\{3;4;5;6\}$
Par suite : les multiples de 9 comprises entrent : 23 et 59 sont : 9×3 ; 9×4 ; 9×5 ; 9×6
C'est à dire : 27 ; 36 :45 ; 54
2) Déterminons les diviseurs de 56
$56=8\times 7=2^3\times 7^1$
Il y a : (3 +1) ×(1 +1) = 4 ×2 = 8diviseurs
Les diviseurs de 56 sont : 1 ; 3 ; 4 ; 7 ; 8 ; 14 ; 28 ; 56
3)s'il Existait un nombre n multiple de 12 c'est-à-dire s'il existait un nombre n tel que 12 divise n et n divise 80
Par transitivité 12 divise 80 ce qui est impossible
Résultat : il n'existe aucun un nombre multiple de 12 et diviseur de 80

Exercice3 : (*)1) a) Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 72
b) Déterminer le nombre de diviseurs de 72.
c) Déterminer les diviseurs de 72
2) a) Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 60
b) Déterminer le nombre de diviseurs de 60.
c) Déterminer les diviseurs de 60
3) a) Déterminer tous les diviseurs communs à 72 et 60
b) Déterminer le : PGCD (72 ; 60)
4) a) Déterminer trois multiples communs à 72 et 60
b) Déterminer le : PPCM (72 ; 60)

Correction : 1) a) La décomposition en facteurs premiers de l'entier naturel 72 est : 72 = $2^3\times 3^2$
b) Il y a : (3 +1) ×(2 +1) = 4 × 3 = 12 diviseurs
c) <u>Methode1 :</u> On peut s'aider d'un arbre pour lister ces diviseurs :



Donc : les diviseurs de 72 sont : 1 ; 3 ; 9 ; 2 ; 6 ; 18 ; 4 ; 12 ; 36 ; 8 ; 24 ; 72
<u>Methode2 :</u> On utilise les critères de divisibilités : On a :
$\sqrt{72}=8,48...$ On prend : 9
Nous déterminons les nombres inferieurs ou égales à 9 qui sont des diviseurs de 72

Qui sont : **1 ; 2 ; 4 ; 3 ; 6; 9** après on divise 72 par 1 on trouve 72 et on divise 72 par 2 on trouve 36
Et on divise 72 par 3 on trouve 24 ……
Nous obtenons ainsi les diviseurs suivants de : 1 ; 3 ; 9 ; 2 ; 6 ; 18 ; 4 ; 12 ; 36 ; 8 ; 24 ; 72
2)a) La décomposition en facteurs premiers de l'entier naturel 60 est : $60 = 2^2 \times 3 \times 5$
b) Il y a : $(2 +1) \times (1 +1) = 3 \times 2 \times 2 = 12$ diviseurs
c) les diviseurs de 60 sont : 1 ; 3 ; 5 ; 2 ; 6 ; 10 ; 4 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60
3) a) Les diviseurs communs à 72 et 60 sont : 1 ; 2 ; 3 ;4 ; 6 ; 12
b) Le PGCD (72 ; 60) : est le plus grand diviseur commun de 72 et 60
Le PGCD :« Le plus grand diviseur commun des deux nombres est le produit des facteurs premiers communs munis du plus petit des exposants trouvés dans leurs décompositions »
Donc : PGCD (72 ; 60) $=2^2 \times 3$
Remarque : les diviseurs de12 sont aussi les diviseurs communs de 72 et 60
4) a) Déterminer deux multiples communs à 72 et 60
Les multiples de 60 sont : 0 ; 60 ; 120 ; 180 ; 240 ; 300 ; 360 ; …
Les multiples de 72 sont : 0 ; 72 ; 144 ; 216 ; 288 ; 360 ; 432 ; …
Deux multiples communs à 72 et 60 sont : 0 ; 360
b) le : PPCM (72 ; 60) = 360

Exercice4 : Déterminer la parité des nombres suivants : $n \in \mathbb{N}$

1) $375^2 + 648^2$ 2) $\left(25^3 + 24^3\right)^7$ 3) $2n+16$ 4) $10n+5$ 5) $n^2+11n+17$ 6) $n^2+7n+20$
7) $n^2+13n+17$ 8) $5n^2+7n+4$.

Correction : Un nombre pair s'écrit sous la forme 2*k*, avec *k* entier.
Un nombre impair s'écrit sous la forme 2*k*+1, avec *k* entier.

1) $375^2 + 648^2$: 648^2 est paire car le carré d'un nombre pair.
375^2 est impair car le carré d'un nombre impair.
$375^2 + 648^2$ C'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : c'est un nombre impair.

2) 24^3 est paire car le produit de nombres pairs et 25^3 est impair car le produit de nombres impairs
Donc : $25^3 + 24^3$ c'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : c'est un nombre impair
Et par suite : $\left(25^3 + 24^3\right)^7$ est impair car le produit de nombres impairs.

3) $2n+16 = 2(n+8) = 2\times k$ avec $k = n+8 \in \mathbb{N}$
Et par suite : $2n+16$ est un nombre pair.

4) $10n+5 = 2(5n+2)+1 = 2\times k +1$ avec $k = 5n+2 \in \mathbb{N}$
Par suite : $10n+5$ est un nombre impair.

5) On a : $n^2+11n+17 = n^2+n+10n+16+1$ $n^2+11n+17 = n(n+1)+2(5n+8)+1$
Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.
Donc : il existe un entier naturel k tel que : $n(n+1) = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$
Donc : $n^2+11n+17 = 2k+2(5n+8)+1$
Donc : $n^2+11n+17 = 2(k+5n+8)+1 = 2k'+1$ Avec $k' = k+5n+8$
Par suite : $n^2+11n+17$ est un nombre impair.

6) On a: $n^2+7n+20 = n^2+n+6n+20 = n(n+1)+2(3n+10)$
Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.
$n^2+7n+20 = 2k+2(3n+10) = 2(k+3n+10) = 2k'$ Avec $k' = k+3n+10$
Donc $n^2+7n+20$ est un nombre pair.

7) Etude de la parité de $n^2+13n+17$:
$n^2+13n+17 = n^2+n+12n+16+1$ $n^2+13n+17 = n(n+1)+2(6n+8)+1$

On a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

Par suite : $n^2+13n+17=2k+2k'+1=2(k+k')+1=2k''+1$ avec : $k''=k+k'\in\mathbb{N}$

Donc $n^2+13n+17$ est un nombre impair

8) Etude de la parité de $5n^2+7n+4$: $5n^2+7n+4=5n^2+5n+2n+4=5n(n+1)+2(n+2)$

On a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Par suite : $5n^2+7n+4=5\times 2k+2k'=2(5k+k')=2k''$ Avec : $k'=n+2\in\mathbb{N}$ et $k''=5k+k'\in\mathbb{N}$

Donc $5n^2+7n+4$ est un nombre pair

Exercice5 : (***) Soit n est un nombre entier naturel impair

1) Vérifier que : n^2-1 est un multiple de 8 dans cas suivants : $n=1$; $n=3$; $n=5$; $n=7$

2) Montrer que : n^2-1 est un multiple de 4

3) Montrer que : n^2-1 est un multiple de 8

4) En déduire que : n^4-1 est un multiple de 16

5) Montrer que si n et m sont impairs alors : n^2+m^2+6 est un multiple de 8

Correction : **1)** si $n=1$ alors $1^2-1=0$ est un multiple de 8

Si $n=3$ alors : $3^2-1=8$ est un multiple de 8

Si $n=5$ alors $5^2-1=24$ est un multiple de 8

Si $n=7$ alors : $7^2-1=48$ est un multiple de 8

2) n *est impair* donc : $n=2k+1$.

Donc : $n^2-1=(2k+1)^2-1=(2k)^2+2\times 2k\times 1+(1)^2-1$

$n^2-1=4k^2+4k+1-1=4k^2+4k=4(k^2+k)=4\times k'$ *Avec* $k'=k^2+k\in\mathbb{N}$

Donc : n^2-1 est un multiple de 4.

3) On a trouvé : $n^2-1=4k(k+1)$ *or* $k(k+1)$ *est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.*

Donc : $k(k+1)=2k'$ avec $k'\in\mathbb{N}$

Donc : $n^2-1=8k'$ et par suite : n^2-1 est un multiple de 8.

4) $n^4-1=(n^2)^2-1^2=(n^2-1)(n^2+1)$.

Et on a trouvé que : $n^2-1=4k'$ avec $k'\in\mathbb{N}$.

Et on a : $n^2+1=4k^2+4k+1+1=4k^2+4k+2$

$n^2+1=4(k^2+k+1)=4\times k''$

Donc : $n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)=(4k')(4k'')=16k'''$ avec : $k'''=k'k''\in\mathbb{N}$

Donc : n^4-1 est un multiple de 16.

5) On a trouvé que : n^2-1 est un multiple de 8

Donc : $n^2-1=8k$ c'est-à-dire : $n^2=8k+1$ de même on a : m^2-1 est un multiple de 8

Donc : $m^2-1=8k'$ c'est-à-dire : $m^2=8k'+1$

$n^2+m^2+6=8k+1+8k'+1+6=8k+8k'+8$

$n^2+m^2+6=8(k+k'+1)=8k''$ Avec : $k''=k+k'+1\in\mathbb{N}$

Par conséquent : n^2+m^2+6 est un multiple de 8.

Exercice6 : (**) Soient : $n\in\mathbb{N}^*$ tel que : $n-1$ soit un multiple de 3.

Montrer que : n^2-1 est un entier naturel multiple de 3.

Correction : On a : $n-1$ soit un multiple de 3

Donc il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que : $n-1=3k$ c'est-à-dire : $n=3k+1$

Donc : $n^2-1=(3k+1)^2-1=9k^2+6k+1-1=9k^2+6k$ $n^2-1=3(3k^2+2k)=3k'$ avec : $k'=3k^2+2k\in\mathbb{N}$

Par suite : n^2-1 est un entier naturel multiple de 3

Exercice7 : (*) Est-ce que les nombres suivants sont premiers ? Justifier votre réponse.

0 ; 17 ; 21 ; 41 ; 87 ; 105 ; 239 ; 2787 ; 191 ;1004001 et 259

Correction : Un nombre est premier s'il possède exactement deux diviseurs qui sont : 1 et lui-même.
1) 0 n'est pas premier car tous les nombres divise 0
17 est premier car admet exactement deux diviseurs
21 n'est pas premier car 3 divise 21 ($21 = 7 \times 3$)
41 est premier car admet exactement deux diviseurs
87 n'est pas premier car 3 divise 87 ($87 = 29 \times 3$)
105 n'est pas premier car 5 divise 105 ($105 = 5 \times 21$)
Question : Est-ce que 239 est premier ?
On utilise la règle suivante : « Pour montrer qu'un nombre est premier il suffit de vérifier qu'il n'est pas divisible par aucun nombre premier p inferieur à sa racine carré »
Donc on cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2 \leq 239$
Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 et aucun ne divise 239 et par conséquent : 239 est premier
2787 n'est pas premier car la somme des chiffres est 24 qui est multiple de 3 donc 3 divise 2787
3) Est ce que 191 est premier ? On utilise la règle : On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2 \leq 191$
Les nombres sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 et aucun ne divise 191. Par conséquent : 191 est premier
1004001 n'est pas premier car la somme des chiffres est 6 qui est un multiple de 3 donc 3 divise 1004001
259 n'est pas premier car $259 = 7 \times 37$ c'est à dire 7 divise 259.

Exercice8 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$ on pose : $A = 7^{n+2} - 7^n$; $B = 2^{n+3} + 2^n$
1) Décomposer A en produit de facteurs premiers puis montrer qu'il est divisible par 12
2) Décomposer B en produit de facteurs premiers puis montrer qu'il est divisible par 9
3) En déduire $A \wedge B$ et $A \vee B$

Correction : 1) $A = 7^{n+2} - 7^n = 7^n \times 7^2 - 7^n = 7^n \times \left(7^2 - 1\right) = 7^n \times 48 = 2^4 \times 3^1 \times 7^n$
La décomposition de A en produit de facteurs premiers est : $A = 2^4 \times 3^1 \times 7^n$
$A = 2^4 \times 3^1 \times 7^n = 2^2 \times 3 \times 2^2 \times 7^n = 12 \times \left(2^2 \times 7^n\right) = 12 \times k$ avec $k = 2^2 \times 7^n$
Donc : A est divisible par 12
2) $B = 2^{n+3} + 2^n = 2^n \times 2^3 + 2^n = 2^n \times \left(2^3 + 1\right) = 2^n \times 9 = 2^n \times 3^2$
La décomposition de B en produit de facteurs premiers est : $B = 2^n \times 3^2$
$B = 2^n \times 9 = 9 \times k$ Avec $k = 2^n$ Donc : B est divisible par 9
3) Déduction de : $A \wedge B$ et $A \vee B$.
On a trouvé : $A = 2^4 \times 3^1 \times 7^n$ et $B = 2^n \times 3^2$
On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs premiers communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de A et B
Donc : $A \wedge B = 2^4 \times 3^1 = 48$ car $n \geq 4$
On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs premiers communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de A et B
Donc : $A \vee B = 2^n \times 3^2 \times 7^n = 9 \times 14^n$

Exercice9 : Déterminer tous les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation :
$x^2 - y^2 = 17$ **Correction :** 1) $x^2 - y^2 = 17$ Équivaut a $(x+y)(x-y) = 17$
Donc : $x + y$ et $x - y$ sont des diviseurs de 17
On a : $17 = 1 \times 17$ donc les diviseurs de 17 sont : 1 et 17
Par suite : $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 17 \end{cases}$ car $x - y \prec x + y$ Donc : $\begin{cases} 2x = 18 \\ x + y = 17 \end{cases}$ **cad :** $\begin{cases} x = 9 \\ x + y = 17 \end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases} x = 9 \\ y = 17 - 9 = 8 \end{cases}$
Par suite : le couple $(x; y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation est : $(9;8)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

Tronc commun Sciences BIOF

Série N°2 : Arithmétique dans IN

Exercice01 : (*) :
Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre 1344 et en déduire le nombre de diviseurs de 1344

Exercice02 : (*) Déterminer tous les diviseurs communs à 375 et 2070

Exercice03 : (**) Déterminer le chiffre x pour que le nombre : $\overline{95x2x31x}$ Soit divisible par 3 et un nombre impair (Déterminer tous les nombres possibles)

Exercice04 : (*) 1) Décomposer les deux nombres 612et 1530 en produit de facteurs premiers.
2) En déduire le : PGCD et le PPMC des nombres 612 et 1530
3) a) Déduire la forme irréductible de la fraction : $\frac{612}{1530}$ b) Déduire la somme suivante : $\frac{7}{612}+\frac{3}{1530}$
4) Simplifier la racine carrée suivant : $\sqrt{612\times1530}$ et l'écrire sous la forme $m\sqrt{n}$ avec m et n entiers

Exercice05 : (*) Est-ce que les nombres suivants sont premiers ? justifier votre réponse ?
1 ; 1075 ; 1061 ; 801020103 ; 2017 ;2021

Exercice06 : (**) Soit $n\in\mathbb{N}$ on pose : $a=10^{2n+3}-10^{2n+1}$; $b=3\times10^{n+1}+4\times10^{n}$
1) Montrer que : a est un multiple de 11 et que b un multiple de 17
2) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres a et b
3) En déduire $a\wedge b$ et $a\vee b$

Exercice07 : (***) 1) Montrer que le produit de deux nombres consécutifs est un nombre pair
2) Déterminer la parité des nombres suivants : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$
a) 2023^2+2022^2 b) $2n^2+7$ c) $2022n+4m+2021$ d) $n^2+2021n+2023$ e) n^2+8n

Exercice08 : (***) Soit n est un nombre entier naturel impair
1)Vérifier que n^2-1 est un multiple de 8 dans cas suivants : $n=1$; $n=3$; $n=5$; $n=7$
2)Montrer que n^2-1 est un multiple de 4 si n est impair
3)Montrer que n^2-1 est un multiple de 8 si n est impair
4)En déduire que : n^4-1 est un multiple de 16 si n est impair
5) Montrer que si n et m sont impairs alors : n^2+m^2+6 est un multiple de 8

Exercice09 : (***) Soit n un entier naturel :
1) Factoriser le nombre : n^3+1
2) Déduire que le nombre 27000000001 n'est pas un nombre premier.

Exercice10 : (***) Un pâtisser dispose de moules à gâteaux en forme de plaques de 154 cm de longueur et 132 cm de largeur. Il doit découper, dans ces plaques, des carrés de génoise tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte.
a) Quelle est, en cm, la mesure du côté d'un gâteau ?
b) Combien de gâteaux le pâtissier pourra-t-il découper dans une plaque ?

Exercice11 : (***) Quels sont les entiers naturels non nuls x et y qui vérifient la relation : $x^2=y^2+2021$.

Exercice12 : (***) Soient n et a deux entiers naturels non nuls. On pose: $S=(a+1)+(a+2)+....(a+n)$
1) Montrer que : $1+2+3+....+(n-2)+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$
2) Montrer que n divise le nombre $S-\frac{n(n+1)}{2}$
3) Montrer que si n est impair alors S est divisible par n

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

Correction de la série N°2 : Arithmétique dans IN

Exercice01 : (*)
Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre 1344 et en déduire le nombre de diviseurs de 1344

Technique (1)

1344	**2**
672	**2**
336	**2**
168	**2**
84	**2**
42	**2**
21	**3**
7	**7**
1	

Correction : <u>Technique</u> (1) : $1344 = 2^6 \times 3^1 \times 7^1$

Le nombre de diviseurs de 1344 est : $(6+1) \times (1+1) \times (1+1) = 7 \times 2 \times 2 = 28$

Exercice02 : (*) Déterminer tous les diviseurs communs à 375 et 2070

Correction : Méthode1 : Les diviseurs de 375 sont :1, 3, 5, 15, 25, 75,125 et 375

Les diviseurs de 2070 sont :1,2,3,5,6,9,15,18,23,30,45,46,69,90,115,138,230,414,690, 345, 1035, 2070

Les diviseurs communs à 375 et 2070 sont donc : 1, 3 ,5, 15.

<u>Méthode2 :</u> les diviseurs communs à 375 et 2070 sont aussi les diviseurs de leur PGCD.

On a : $375 = 3 \times 5^3$; $2070 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 23$

On applique la règle suivante pour calculer le PGCD :« Le plus grand diviseur commun de deux nombres est le produit des facteurs premiers communs munis du plus petit des exposants trouvés dans leurs décompositions »

Donc : PGCD (375 ; 2070) $=3 \times 5=15$

Et les diviseurs de 15 sont : 1, 3 ,5, 15.

Qui sont aussi les diviseurs communs de 375 et 2070

Exercice03 : (**) Déterminer le chiffre x pour que le nombre : $95x2x31x$ Soit divisible par 3 et un nombre impair (Déterminer tous les nombres possibles)

Correction : On a $0 \leq x \leq 9$ le nombre : $95x2x31x$ est impair donc : $x \in \{1;3;5;7;9\}$

Le nombre : $95x2x31x$ est divisible par 3 ssi : $9+5+x+2+x+3+1+x=3k$ cad un multiple de 3

Donc : $20+3x=3k$

Donc : en donnant a x les valeurs $\{1;3;5;7;9\}$ on trouve que $x=5$ donc le nombre est : 95525315

Exercice04 : (*) 1) Décomposer les deux nombres 612 et 1530 en produit de facteurs premiers.

2) En déduire le : PGCD et le PPMC des nombres 612 et 1530

3) a) Déduire la forme irréductible de la fraction : $\dfrac{612}{1530}$ b) Déduire la somme suivante : $\dfrac{7}{612}+\dfrac{3}{1530}$

4) Simplifier la racine carrée suivant : $\sqrt{612 \times 1530}$ et l'écrire sous la forme $m\sqrt{n}$ avec m et n entiers

Correction :

- On dit qu'une fraction est irréductible, lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.
- On dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur seul diviseur commun est 1.

1) $612 = 2^2 \times 3^2 \times 17$ et $1530 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1 \times 17$

2)a) On applique la règle suivante pour calculer le PGCD (612 ;1520) :« Le plus grand diviseur commun de deux nombres est le produit des facteurs premiers communs munis du plus petit des exposants trouvés dans leurs décompositions »

Donc : $PGCD(1530;612) = 2^1 \times 3^2 \times 17 = 306$

b) Pour calculer le PPMC des nombres 612 et 1530 on a deux méthodes :

Methode1 : Ecrire le produit de tous les facteurs premiers présents dans l'une ou dans l'autre de ces deux décompositions et élever ces facteurs à leur plus grande puissance

Donc : $PPCM(612;1530) = 2^2 \times 3^2 \times 5^1 \times 17^1 = 3060$

Methode2 : On a : $PGCD(612;1530) \times PPCM(612;1530) = 612 \times 1530$

Donc : $PPCM(612;1530) = \dfrac{612 \times 1530}{PGCD(612;1530)} = 3060$

2)a) Méthode 1 : $\frac{612}{1530}=\frac{2^2\times3^2\times17}{2^1\times3^2\times5^1\times17}=\frac{2}{5}$ Méthode 2 : $\frac{612}{1530}=\frac{612\div306}{1530\div306}=\frac{2}{5}$

Remarque : le $PGCD(2;5)=1$

b) Calcul de : $\frac{7}{612}+\frac{3}{1530}$ Il faut mettre les fractions au même dénominateur :

Le $PPCM(612;1530)=3060$ est par définition le plus petit multiple commun de ces nombres :

$3060\div612=5$ et $3060\div1530=2$

$\frac{7}{612}+\frac{3}{1530}=\frac{7\times5}{612\times5}+\frac{3\times2}{1530\times2}=\frac{35}{3060}+\frac{6}{3060}$ Donc : $\frac{7}{612}+\frac{3}{1530}=\frac{35+6}{3060}=\frac{41}{3060}$

Remarque : le $PGCD(41;3060)=1$ en effet : on peut utiliser Algorithme d'Euclide qui est une autre méthode pour déterminer le PGDC :

3060 = 74 $\times$ 41 + 26

41 = 1 $\times$ **26** + **15**

26 = 1 $\times$ **15** + **11**

15 = 1 $\times$ **11** + **4**

11 = 2 $\times$ **4** + **3**

4 = 1 $\times$ **3** + **1**

3 = 3 $\times$ **1** + **0**

Le **PGDC** est le dernier reste non nul : donc $PGCD(41;3060)=1$

4) $\sqrt{612\times1530}=\sqrt{2^1\times3^2\times5\times2^2\times3^2\times17^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{2^2}\times\sqrt{3^2}\times\sqrt{17^2}$

$\sqrt{612\times1530}=\sqrt{2}\times3\times\sqrt{5}\times2\times3\times17=306\times\sqrt{10}$

Exercice05 : (*) Est-ce que les nombres suivants sont premiers ? justifier votre réponse ?

1 ; 1075 ; 1061 ; 801020103 ; 2017 ;2021

Correction : 1)1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1

2)1075 n'est pas premier car 7 divise 1075

3) Est ce que 1061 est premier ? on utilise une technique :

On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2\leq1061$

Les nombres sont : 2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 ;17 ;19 ;23 ;29 ;31 Car : $31^2=961$ et $37^2=1396$

Et aucun ne divise 1061 Donc 1061 est premier

4) 667 n'est pas premier car 23 divise 667 ($667=23\times29$)

5) 801020103 n'est pas premier car la somme des chiffres est un multiple de 3 donc 3 divise 801020103

5) Est ce que 2019 est premier ? on utilise une technique :

On cherche les nombres premiers p qui vérifient : $p^2\leq2019$.

Les nombres sont : 2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 ;17 ;19 ;23 ;29 ;31 ;37 ;41 ;43 Car : $43^2=1849$ et $47^2=2209$

Et aucun ne divise 2017 Donc 2017 est premier

4) 2021 n'est pas premier car 43 divise 2021

Exercice06 : (**) Soit $n\in\mathbb{N}$ on pose : $a=10^{2n+3}-10^{2n+1}$; $b=3\times10^{n+1}+4\times10^n$

1) Montrer que : a est un multiple de 11 et que b un multiple de 17

2) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres a et b

3) En déduire $a\wedge b$ et $a\vee b$

Correction : 1) $a=10^{2n+3}-10^{2n+1}=10^{2n}\times10^3-10^{2n}\times10^1=10^{2n}\times(10^3-10)$

$a=10^{2n}\times(990)=10^{2n}\times99\times10=3\times33\times10^{2n}\times10k$

$a=3^2\times11\times10^{2n}\times10=3^2\times11\times10^{2n+1}=11\times k$ avec $k=3^2\times10^{2n+1}$

Donc a est un multiple de 11

On a : $b=3\times10^{n+1}+4\times10^n=3\times10^n\times10^1+4\times10^n=10^n(30+4)=10^n\times34=10^n\times2\times17$

$b=17\times2\times10^n=17\times k$ avec : $k=2\times10^n$

Donc b un multiple de 17

2)Décomposition en produit de facteurs premiers les nombres a et b

On a trouvé que : $a=3^2\times11\times10^{2n+1}$ donc : $a=3^2\times11\times(2\times5)^{2n+1}$

Donc : $a=2^{2n+1}\times3^2\times5^{2n+1}\times11$ et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de a

On a trouvé : $b=17\times2\times10^n$ donc : $b=17\times2\times10^n=17\times2\times(2\times5)^n$

Donc : $b=17\times2\times2^n\times5^n=2^{n+1}\times5^n\times17$ et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de a

3) Déduction de : $a\wedge b$ et $a\vee b$

On a : $a=2^{2n+1}\times3^2\times5^{2n+1}\times11$ et $b=2^{n+1}\times5^n\times17$

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $a\wedge b=2^{2n+1}\times5^n$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs et non munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $a\vee b=2^{2n+1}\times3^2\times5^{2n+1}\times17\times11=2^{2n+1}\times5^{2n+1}\times693$

Exercice07 : (***) 1) Montrer que le produit de deux nombres consécutifs est un nombre pair

2) Déterminer la parité des nombres suivants : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$

a) 2023^2+2022^2 b) $2n^2+7$ c) $2022n+4m+2021$ d) $n^2+2021n+2023$ e) n^2+8n

Correction : Un nombre pair s'écrit sous la forme 2k, avec k entier.

Un nombre impair s'écrit sous la forme 2k+1, avec k entier.

1) Soit $n\in\mathbb{N}$ (un entier naturel quelconque)

$n\times(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs. Exemple : 2×3 ou 3×4 ou 100×101 ...

On va monter que : $n\times(n+1)$ est un nombre pair.

Pour cela on va utiliser un raisonnement qui s'appelle raisonnement par disjonction des cas en effet :

1ére cas : Si n est pair alors il existe un entier

Naturel k tel que : $n=2k$ par suite : $n\times(n+1)=2k\times(2k+1)=2\left[k\times(2k+1)\right]=2k'$ avec

$k'=k\times(2k+1)\in\mathbb{N}$

Cela signifie que : $n\times(n+1)$ est pair.

2ére cas : Si n est impair alors il existe un entier naturel k tel que : $n=2k+1$

Par suite : $n\times(n+1)=(2k+1)\times(2k+1+1)$

Donc : $n\times(n+1)=(2k+1)\times(2k+2)=2(2k+1)\times(k+1)$

Donc : $n\times(n+1)=2k'$ avec $k'=(2k+1)\times(k+1)\in\mathbb{N}$

Cela signifie que : $n\times(n+1)$ est pair

Par conséquent : $n\times(n+1)$ est un nombre pair pour tout $n\in\mathbb{N}$

2) a) 2023^2+2022^2 : 2022^2 est paire car le carré d'un nombre pair.

2023^2 est impair car le carré d'un nombre impair.

2023^2+2022^2 C'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : c'est un nombre impair.

b) $2n^2+7=2n^2+6+1=2(n^2+3)+1=2\times k+1$ avec $k=n^2+3\in\mathbb{N}$

Et par suite : $2n^2+7$ est un nombre impair.

c) $2022n+4m+2021=2022n+4m+2020+1=2(1011n+2m+1010)=2k+1$

Avec : $k=1011n+2m+1010\in\mathbb{N}$.

Donc : $2022n+4m+2021$ est un nombre impair.

d)On a : $n^2+2021n+2023=n^2+n+2020n+2022+1=n(n+1)+2(1010n+1011)+1$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : il existe un entier naturel k tel que : $n(n+1)=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Donc : $n^2+2021n+2023=2k+2(1010n+1011)+1$

Donc : $n^2+2021n+2023=2(k+1010n+1011)+1=2k'+1$ avec $k'=k+1010n+1011$

Par suite : $n^2+2021n+2023$ est un nombre impair.

e) Etude de la parité de $n^2+2024n$:

1ére cas : si n pair.

$n^2=n\times n$ Est aussi pair car le carré d'un nombre pair et $2024n=2\times(1012n)=2\times k$ est pair

On a : $n^2+2024n$ c'est la somme de deux nombres pairs donc : $n^2+2024n$ est pair.

2ére cas : si n impair.

$n^2=n\times n$ Est aussi impair car le carré d'un nombre impair et $2024n=2\times(1012n)=2\times k$ est pair

On a : $n^2+2024n$ c'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : $n^2+2024n$ est impair.

Exercice08 : (***) Soit n est un nombre entier naturel impair

1)Vérifier que n^2-1 est un multiple de 8 dans cas suivants : $n=1$; $n=3$; $n=5$; $n=7$

2)Montrer que n^2-1 est un multiple de 4 si n est impair

3)Montrer que n^2-1 est un multiple de 8 si n est impair

4)En déduire que : n^4-1 est un multiple de 16 si n est impair

5) Montrer que si n et m sont impairs alors : n^2+m^2+6 est un multiple de 8

Correction : 1) si $n=1$ alors $1^2-1=0$ est un multiple de 8

Si $n=3$ alors $3^2-1=8$ est un multiple de 8

Si $n=5$ alors $5^2-1=24$ est un multiple de 8

Si $n=7$ alors $7^2-1=48$ est un multiple de 8

2) n est impair donc : $n=2k+1$

Donc : $n^2-1=(2k+1)^2-1=(2k)^2+2\times2k\times1+(1)^2-1$

$n^2-1=4k^2+4k+1-1=4k^2+4k=4(k^2+k)=4\times k'$ Avec $k'=k^2+k$

Donc : n^2-1 est un multiple de 4

3)On a trouvé : $n^2-1=4k(k+1)$

Or $k(k+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair donc : $k(k+1)=2k'$

Donc : $n^2-1=8k'$

Donc : n^2-1 est un multiple de 8

4) $n^4-1=(n^2)^2-1^2=(n^2-1)(n^2+1)$

Et on a trouvé que : $n^2-1=4k'$

Et on a : $n^2+1=4k^2+4k+1+1=4k^2+4k+2=4(k^2+k+1)=4\times k''$

Donc : $n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)=(4k')(4k'')=16k'''$

Donc : n^4-1 est un multiple de 16

5) on a trouvé que : n^2-1 est un multiple de8

Donc : $n^2-1=8k$ donc : $n^2=8k+1$

De même on a : : m^2-1 est un multiple de8

Donc : $m^2-1=8k'$ donc : $m^2=8k'+1$

$n^2+m^2+6=8k+1+8k'+1+6=8k+8k'+8=8(k+k'+1)=8k''$

Donc : n^2+m^2+6 est un multiple de 8

Exercice09 : (***) Soit n un entier naturel :

1) Factoriser le nombre : n^3+1

2) Déduire que le nombre 27000000001 n'est pas un nombre premier.

Correction : 1) On a : $n^3+m^3=(n+m)(n^2-n\times m+m^2)$

Donc : $n^3+1=n^3+1^3=(n+1)(n^2-n+1)$

2) $27000000001=27\times10^9+1=3^3\times10^9+1=3^3\times10^9+1=(3\times10^3)^3+1=(3\times10^3+1)((3\times10^3)^2-3\times10^3+1)$

Donc : $27000000001=3001\left(3000^2-3000+1\right)=3001\times8997001$

Donc : le nombre 27000000001 n'est pas un nombre premier car il admet plus que de deux diviseurs qui sont : 3001 et 8997001

Exercice10 : (***) Un pâtisser dispose de moules à gâteaux en forme de plaques de 154 cm de longueur et 132 cm de largeur. Il doit découper, dans ces plaques, des carrés de génoise tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte.
a) Quelle est, en cm, la mesure du côté d'un gâteau ?
b) Combien de gâteaux le pâtissier pourra-t-il découper dans une plaque ?

Correction : 1) a) Si on souhaite découper, dans ces plaques, des carrés de génoise tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte. La solution et de prendre le plus grand diviseur commun de 154 et 132
Alors on cherche le PGCD de 154 et 132 car ce nombre doit être un diviseur à la fois de 154 et 132
$154 = 2 \times 7\times 11$ et $132=2^2\times3 \times 11$
PGCD (154, 132) =2 × 11= 22 (on ne prend que les facteurs premiers qui apparaissent dans les deux décompositions et on les affecte du plus petit exposant).
Donc : la mesure du côté d'un gâteau est 22 cm
b) *Methode1 :*Le nombre total de gâteaux :

- Sur la longueur : $154\div22=7$
- Sur la largeur : $132\div22=6$

Le nombre total de gâteaux à découper dans une plaque est : $7\times6=42$ gâteaux
Methode1 : la surface de la plaque est : $154\times132=20328\,\text{cm}^2$
La surface d'un gâteau est : $22\times22=484\,\text{cm}^2$
Le nombre total de gâteaux à découper dans une plaque est : $\frac{20328}{484}=42$ gâteaux

Exercice11 : (***) Quels sont les entiers naturels non nuls x et y qui vérifient la relation : $x^2=y^2+2021$.

Correction : $x^2=y^2+2021$ Équivaut à : $x^2-y^2=2021$
Équivaut à : $(x-y)(x+y)=2021$.
Équivaut à : $(x-y)(x+y)=43\times47=1\times2021$ avec 43 et 47 des nombres premiers
Et on a : $x-y\le x+y$
Donc on a : $\begin{cases}x-y=1\\x+y=2021\end{cases}$ ou $\begin{cases}x-y=43\\x+y=47\end{cases}$
D'où : $\begin{cases}x=1011\\y=1010\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=45\\y=2\end{cases}$

Exercice12 : (***) Soient n et a deux entiers naturels non nuls. On pose: $S=(a+1)+(a+2)+....(a+n)$
1) Montrer que : $1+2+3+....+(n-2)+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$
2) Montrer que n divise le nombre $S-\frac{n(n+1)}{2}$
3) Montrer que si n est impair alors S est divisible par n .

Correction :1) Montrons que : $1+2+3+....+(n-2)+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$
On pose : $A=1+2+3+....+(n-2)+(n-1)+n$ ①
On a aussi $A=n+(n-1)+(n-2)+...+2+1$ ②
Donc : ① + ② donne : $2A=\underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+....+(n+1)+(n+1)+(n+1)}_{n\ fois}$

Donc : $2A = n(n+1)$ par suite : $A = \frac{n(n+1)}{2}$

2) Montrons que n divise le nombre $S - \frac{n(n+1)}{2}$

$$S - \frac{n(n+1)}{2} = (a+1) + (a+2) + ...(a+n) - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S - \frac{n(n+1)}{2} = \underbrace{a + a + ...a}_{n\ fois} + (1+2+3+...+n) - \frac{n(n+1)}{2}$$

Donc : $S - \frac{n(n+1)}{2} = na + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = na$

Donc : n divise le nombre $S - \frac{n(n+1)}{2}$

3) Montrons que si n est impair alors S est divisible par n :
Supposons que : n est impair alors : $n = 2k+1$ Avec : $k \in \mathbb{N}$

On a : $S - \frac{n(n+1)}{2} = na$ donc : $S = na + \frac{n(n+1)}{2}$ par suite : $S = (2k+1)a + \frac{(2k+1)(2k+2)}{2}$

Donc : $S = (2k+1)a + (2k+1)(k+1)$

Donc : $S = (2k+1)(a+k+1) = n(a+k+1) = n \times k'$ Avec : $k' \in \mathbb{N}$

Donc : S est divisible par n

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

Tronc commun Sciences BIOF

Série N°3 : Arithmétique dans IN

Exercice1 : (*) Deux entiers naturels m et n sont dits amicaux, si la somme des diviseurs de m (Autres que m) est égale à n et simultanément la Somme des diviseurs de n (autres que n) Est égale à m.

1) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres : 220 et 284.
2) Vérifier que 220 et 284 sont amicaux.
3) En déduire le : PGCD et le PPMC des nombres 220 et 284.
4) a) En déduire la forme irréductible de la fraction : $\frac{220}{284}$

b) Déduire la somme suivante : $\frac{5}{220}+\frac{7}{284}$

c) Simplifier la racine carrée suivant : $\sqrt{220\times 284}$ et l'écrire sous la forme $m\sqrt{n}$ avec m et n entiers

Exercice2 : (**) Déterminer la parité des nombres suivants : $n\in\mathbb{N}$

a) $2021^3+2022^3+2023^3$ b) $20n^2+10n+3$ c) $n^2+2019n+2020$ d) n^2+6n

Exercice3 : (**) 1) Montrer que la somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3

2) Montrer que la somme de deux entiers naturels impair consécutifs est un multiple de 4

Exercice4 : (**) (***) Soit $n\in\mathbb{N}$

1) Développer : $(n+1)^2-n^2$
2) Déduire que tout nombre impair peut s'écrire par La différence des carrés de deux nombres entiers Consécutifs. (C'est-à-dire : si *n* impair, il existe Deux nombres consécutifs *a*, *b* et $n=b^2-a^2$)
3) Appliquer l'affirmation précédente et écrire les nombres 31 ; 2019 ; 2021 sous forme de deux carrés consécutifs
4) Soit $n\in\mathbb{N}$ montrer que le nombre n^2+n+7 Est impair.
5) Appliquer l'affirmation précédente sur le nombre n^2+n+7

Exercice5 : (**) Soit $n\in\mathbb{N}$

Montrer que : $7^{3n+2}\times 11^{3n+1}\times 5^{3n}+539$ est divisible par 1078

Exercice6 : (***) Soit n un entier naturel :

1) Ecrire le nombre : n^4+4 sous la forme de différence de deux carrés parfaits
2) Déduire que le nombre n^4+4 n'est pas un nombre premier pour tout n entier naturel

Exercice7 : (***) Un collectionneur possède 432 timbres Marocains et 384 timbres étrangers.

Il souhaite vendre toute sa collection en réalisant des lots identiques, c'est-à-dire comportant le même nombre de timbres Marocains et étrangers.

a) Quel nombre maximal de lots peut-il réaliser ?
b) Quel est le nombre total de timbres par lot ?

Exercice8 : (***) On dispose de dalles rectangulaires de longueur 24 cm et de largeur 15 cm.

Quelle serait la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpe ? et La longueur du côté doit être comprise entre 3 et 4 m.

Exercice9 : (***) Soit : $n\in\mathbb{N}$ et $n\neq 6$ On pose : $F=\frac{n+9}{n-6}$

1)Déterminer dans les cas suivants la forme irréductible de fraction F : $n=9$; $n=25$; $n=46$

2)Quelles sont les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles la fraction $F=\frac{n+9}{n-6}$ Représente un entier naturel ?

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

Tronc commun Sciences BIOF
Correction de la série N°3 : Arithmétique dans IN

Exercice1 : (*) Deux entiers naturels m et n sont dits amicaux, si la somme des diviseurs de m (Autres que m) est égale à n et simultanément la Somme des diviseurs de n (autres que n) est égale à m.
1) Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres : 220 et 284.
2) Vérifier que 220 et 284 sont amicaux.
3) En déduire le : PGCD et le PPMC des nombres 220 et 284.
4) a) En déduire la forme irréductible de la fraction : $\frac{220}{284}$
b) Déduire la somme suivante : $\frac{5}{220}+\frac{7}{284}$
c) Simplifier la racine carrée suivant : $\sqrt{220\times284}$ et l'écrire sous la forme $m\sqrt{n}$ avec m et n entiers
Correction : 1) $220=2^2\times5\times11$ et $284=2^2\times71$.
2)Les diviseurs de 220 sont : 1; 2; 4; 5; 10; 11; 20; 22; 44; 55; 110 ;220.
Les diviseurs de 284 sont 1;2;4;71;142;284
Calculons la somme des diviseurs de 220 sauf 220 : $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$
Et Calculons la somme des diviseurs de 284 Sauf le 284 est : $1+2+4+71+142=220$
Conclusion : 220 et 284 sont deux entiers amicaux
3)a) Déduction du : PGCD 220 et 284.
Methode1 : le PGCD des nombres 220 et 284 est le plus grand diviseur commun des deux nombres 220 et 284.
Les diviseurs communs des deux nombres 220 et 284 sont : 1 ; 2 ; 4 et le plus grand est : 4
Donc : $PGCD(284;220)=4$
Methode2 : On a : $220=2^2\times5\times11$ et $284=2^2\times71$.
On applique la règle suivante pour calculer le PGCD (220 ;284) :« Le plus grand diviseur commun de deux nombres est le produit des facteurs premiers communs munis du plus petit des exposants trouvés dans leurs décompositions »
Donc : $PGCD(284;220)=2^2=4$
b) Déduction du : PPMC des nombres 220 et 284.
Methode1 : le PPMC est le produit de tous les facteurs premiers présents dans l'une ou dans l'autre de ces deux décompositions et élever à leur plus grande puissance :
Donc : $PPCM(284;220)=2^2\times5^1\times11^1\times71^1=15620$
Methode2 : On a : $PGCD(612;1530)\times PPCM(612;1530)=612\times1530$
Donc : $PPCM(284;220)=\frac{284\times220}{PGCD(284;220)}=15620$
4) a) Déduction de la forme irréductible de la fraction : $\frac{220}{284}$
Méthode 1 : $\frac{220}{284}=\frac{2^2\times5\times11}{2^2\times71}=\frac{5\times11}{71}=\frac{55}{71}$
Méthode 2 : On divise le numérateur et le dénominateur par le PGCD (220 ;284) donc : $\frac{220}{284}=\frac{220\div4}{284\div4}=\frac{55}{71}$
4) a) $\frac{5}{220}+\frac{7}{284}$: Il faut mettre les fractions au même dénominateur :
Le $PPCM(284;220)=15620$ est par définition le plus petit multiple commun de ces nombres :
$15620\div220=71$ et $15620\div284=55$
$$\frac{5}{220}+\frac{7}{284}=\frac{5\times71}{220\times71}+\frac{7\times55}{284\times55}=\frac{355}{15620}+\frac{385}{15620}=\frac{355+385}{15620}=\frac{740}{15620}=\frac{740}{15620}$$

$740 = 2^2 \times 5 \times 37$ et $15620 = 2^2 \times 5^1 \times 11^1 \times 71^1$

Donc : $\frac{5}{220} + \frac{7}{284} = \frac{740}{15620} = \frac{2^2 \times 5 \times 37}{2^2 \times 5^1 \times 11^1 \times 71^1} = \frac{37}{11^1 \times 71^1} = \frac{37}{781}$

Remarque : le $PGCD(37;781) = 1$

c) Simplification de la racine carrée suivant : $\sqrt{220 \times 284}$

$\sqrt{220 \times 284} = \sqrt{2^2 \times 5 \times 11 \times 2^2 \times 71} = 2 \times \sqrt{5 \times 11 \times 71} \times 2 = 4\sqrt{5 \times 11 \times 71} = 4\sqrt{3905}$

Exercice2 : (**) Déterminer la parité des nombres suivants : $n \in \mathbb{N}$

a) $2021^3 + 2022^3 + 2023^3$ b) $20n^2 + 10n + 3$ c) $n^2 + 2019n + 2020$ d) $n^2 + 6n$

Correction : Un nombre pair s'écrit sous la forme 2k, avec k entier.
Un nombre impair s'écrit sous la forme 2k+1, avec k entier.

1) a) $2021^3 + 2022^3 + 2023^3$: 2022^3 est paire car le produit de nombres pairs.
2023^3 car le produit de nombres Impairs et 2021^3 car le produit de nombres Impairs
Donc : $2021^3 + 2022^3 + 2023^3$ est un nombre pair.

b) $20n^2 + 10n + 3 = 20n^2 + 10n + 2 + 1 = 2(10n^2 + 5n + 1) + 1 = 2k + 1$

avec $k = 10n^2 + 5n + 1 \in \mathbb{N}$

Donc : $20n^2 + 10n + 3$ est un nombre impair.

c) $n^2 + 2019n + 2020 = n^2 + n + 2018n + 2020 = n(n+1) + 2(1009n + 1010)$

Et on a : $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair.

Donc : il existe un entier naturel k tel que : $n(n+1) = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$

Donc : $n^2 + 2019n + 2020 = 2k + 2(1009n + 1010)$

Donc : $n^2 + 2019n + 2020 = 2(k + 1009n + 1010) = 2k'$ avec $k' = k + 1009n + 1010$

Par suite : $n^2 + 2019n + 2020$ est un nombre pair.

e) Etude de la parité de $n^2 + 6n$:

1ére cas : si n pair.

$n^2 = n \times n$ Est aussi pair car le carré d'un nombre pair et $6n = 2 \times (3n) = 2 \times k$ est pair

On a : $n^2 + 6n$ c'est la somme de deux nombres pairs donc : $n^2 + 6n$ est pair.

2ére cas : si n impair.

$n^2 = n \times n$ Est aussi impair car le carré d'un nombre impair et $6n = 2 \times (3n) = 2 \times k$ est pair

On a : $n^2 + 6n$ c'est la somme d'un nombre impair et un nombre pair donc : $n^2 + 6n$ est impair.

Exercice3 : (**) 1) Montrer que la somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3
2) Montrer que la somme de deux entiers naturels impair consécutifs est un multiple de 4

Correction : 1) Soit $n \in \mathbb{N}$ donc : $n + (n+1) + (n+2)$ est la somme de trois entiers naturels consécutifs

On a : $n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1) = 3k$ avec : $k = n + 1 \in \mathbb{N}$

Donc : la somme de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3

2) Un nombre impair s'écrit sous la forme : $2k+1$ Avec $k \in \mathbb{N}$:

On a donc : $(2k+1) + [(2k+1) + 2] = 4k + 4 = 4(k+1) = 4k'$ Avec : $k' = k + 1 \in \mathbb{N}$

Par suite la somme de deux entiers naturels impair consécutifs est un multiple de 4

Exercice4 : (**) (***) Soit $n \in \mathbb{N}$

1) Développer : $(n+1)^2 - n^2$

2) Déduire que tout nombre impair peut s'écrire par La différence des carrés de deux nombres entiers Consécutifs. (C'est-à-dire : si *n* impair, il existe Deux nombres consécutifs *a*, *b* et $n = b^2 - a^2$)

3) Appliquer l'affirmation précédente et écrire les nombres 31 ; 2019 ; 2021 sous forme de deux carrés consécutifs

4) Soit $n \in \mathbb{N}$ montrer que le nombre $n^2 + n + 7$ Est impair.

5) Appliquer l'affirmation précédente sur le nombre n^2+n+7

Correction : 1) On a : $(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2=2n+1$

2) On a $(n+1)^2-n^2=2n+1$ et le nombre $2n+1$ est impair pour tout $n\in\mathbb{N}$ et n et $n+1$ sont deux nombres consécutifs.

Donc : tout nombre impair s'écrit comme différence de deux carrés consécutifs.

3) Application : $30=2\times15+1$ est impair et ($2n+1=(n+1)^2-n^2$)

Donc : $30=(15+1)^2-15^2=16^2-15^2$

De même : $2019=2\times1009+1$ est impair $2019=(1009+1)^2-1009^2=1010^2-1009^2$

De même : $2021=2\times1010+1$ est impair $2021=(1010+1)^2-1010^2=1011^2-1010^2$

4) On a : $n^2+n+7=n^2+n+6+1=n(n+1)+2\times3+1$

On a : $n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair par suite :

$n^2+n+7=2k+2\times3+1=2(k+3)+1=2k'+1$ avec : $k'=k+3\in\mathbb{N}$

Donc n^2+n+7 est un nombre impair.

5) On a : $n^2+n+7=2k+2\times3+1$ avec $n(n+1)=2k$ c'est-à-dire : $\frac{n(n+1)}{2}=k$

Donc : $n^2+n+7=2(k+3)+1$

Et d'après 2) on a : $n^2+n+7=(k+3+1)^2-(k+3)^2$

Donc : $n^2+n+7=(k+4)^2-(k+3)^2$ avec : $k=\frac{n(n+1)}{2}$

Exercice5 : (**) Soit $n\in\mathbb{N}$ Montrer que : $7^{3n+2}\times11^{3n+1}\times5^{3n}+539$ est divisible par 1078

Correction : Soit $n\in\mathbb{N}$

$7^{3n+2}\times11^{3n+1}\times5^{3n}+539=7^{3n}\times7^2\times11^{3n}\times11^1\times5^{3n}+539$

$7^{3n+2}\times11^{3n+1}\times5^{3n}+539=539\times7^{3n}\times11^{3n}\times5^{3n}+539$

$7^{3n+2}\times11^{3n+1}\times5^{3n}+539=539\left(7^{3n}\times11^{3n}\times5^{3n}+1\right)$

Or : $7^{3n}\times11^{3n}\times5^{3n}$ est un nombre impair car le produit de nombres impairs

Donc : $7^{3n}\times11^{3n}\times5^{3n}+1$ est pair

Donc : $7^{3n}\times11^{3n}\times5^{3n}+1=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$

Donc : $7^{3n+2}\times11^{3n+1}\times5^{3n}+539=539\times2k=1078k$

Par suite : $7^{3n+2}\times11^{3n+1}\times5^{3n}+539$ est divisible par 1078

Exercice6 : (***) Soit n un entier naturel :

1) Ecrire le nombre : n^4+4 sous la forme de différence de deux carrés parfaits

2) Déduire que le nombre n^4+4 n'est pas un nombre premier pour tout n entier naturel

Correction : 1) On a : $n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+2)^2-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2$

2) On a : $n^4+4=(n^2+2)^2-(2n)^2=(n^2+2-2n)(n^2+2+2n)$

Donc : le nombre n^4+4 n'est pas un nombre premier pour tout n entier naturel car il admet au moins Deux diviseurs qui sont : n^2+2n+2 et n^2-2n+2 pour tout n entier naturel

Exercice7 : (***) Un collectionneur possède 432 timbres Marocains et 384 timbres étrangers.

Il souhaite vendre toute sa collection en réalisant des lots identiques, c'est-à-dire comportant le même nombre de timbres Marocains et étrangers.

a) Quel nombre maximal de lots peut-il réaliser ?

b) Quel est le nombre total de timbres par lot ?

Correction : 1) a)432 = $2^4 \times 3^3$ et 384 = $2^7 \times 3$
PGCD (432, 384) = $2^4 \times 3 = 48$ (on ne prend que les facteurs premiers qui apparaissent dans les deux décompositions et on les affecte du plus petit exposant).
Si on souhaite réalisant des lots identiques, c'est-à-dire comportant le même nombre de timbres Marocains et étrangers alors le nombre maximal de lots est le plus grand diviseur de 432 et 384
Alors on cherche le PGCD de 432 et 384 car ce nombre doit être un diviseur à la fois de 432 et 384
Or : PGCD (432, 384) = 48
Donc : le nombre maximal de lots à réaliser est 48 lots
b) Le nombre total de timbres Marocains par lot est : $432 \div 48 = 9$
Le nombre total de timbres étrangers par lot est : $384 \div 48 = 8$

Exercice8 : (***) On dispose de dalles rectangulaires de longueur 24 cm et de largeur 15 cm.
Quelle serait la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpe ?
La longueur du côté doit être comprise entre 3 et 4 m.
Correction : la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpe est un multiple commun de 24 et 15 et la longueur du côté doit être comprise entre 3 et 4 m.
$24 = 2^3 \times 3$ et $15 = 3 \times 5$
PPCM (24, 15) = $2^3 \times 3 \times 5 = 120$ cm
(On prend tous les facteurs premiers qui apparaissent et on les affecte le plus grand exposant).
Mais La longueur du côté doit être comprise entre 3 et 4 m.
On doit prendre un multiple de 120 cm entre 300 et 400 cm et Puisque $120 \times 3 = 360\text{cm}$
Donc : La longueur du côté doit être : **360** cm

Exercice9 : (***) Soit : $n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 6$ On pose : $F = \frac{n+9}{n-6}$
1) Déterminer dans les cas suivants la forme irréductible de fraction F
$n = 9$; $n = 25$; $n = 46$
2) Quelles sont les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles la fraction $F = \frac{n+9}{n-6}$ Représente un entier naturel ?

Correction : 1) si $n = 9$ alors : $F = \frac{9+9}{9-6} = \frac{18}{3} = 6$
Si $n = 25$ alors : $F = \frac{25+9}{25-6} = \frac{34}{19}$ et c'est la forme irréductible de fraction F Car : 34 et 19 sont premiers entre eux
Si $n = 46$ alors : $F = \frac{46+9}{46-6} = \frac{55}{40} = \frac{11}{8}$ et c'est la forme irréductible de fraction F
Car : 11 et 8 sont premiers entre eux
2)On constate que $n+9 = (n-6)+15$ donc : $F = \frac{n+9}{n-6} = \frac{(n-6)+15}{n-6} = \frac{n-6}{n-6} + \frac{15}{n-6} = 1 + \frac{15}{n-6}$
La fraction $F = \frac{n+9}{n-6}$ Représente un entier naturel si $n-6$ divise 15,
Les diviseurs de 15 sont 1 ; 3 ; 5 ; 15
Il faut que $n-6 \in \{1;3;5;15\}$ ce qui entraine que $n \in \{7;9;11;21\}$
Inversement on vérifie que si $n \in \{7;9;11;21\}$ alors La fraction F Représente un entier naturel
Conclusion : la fraction F représente un entier naturel pour les valeurs de l'entier n : $7;9;11;21$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien