Résumé de Cours
Notion d'arithmétique et l'Ensemble des nombres entiers

1) Ensemble $\mathbb{N}$: $\mathbb{N}$ c'est l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N}=\{0;1;2;...\}$.

C'est un ensemble qui commence par 0 mais ne finit jamais.

a) Le nombre 0 est le nombre entier naturel nul.

$\mathbb{N}^*=\{1;2;...\}$ C'est l'ensemble des entiers naturels non nuls ; qui commence par 1 mais ne finit jamais.

7 appartient à $\mathbb{N}$ on écrit : $7\in\mathbb{N}$

-3 N'est pas un nombre entier naturel

On écrit : $-3\notin\mathbb{N}$ et on a : $0\notin\mathbb{N}^*$.

Remarque : $\mathbb{N}^*\subset\mathbb{N}$ et on lit : $\mathbb{N}^*$ est inclus dans $\mathbb{N}$ ou encore : $\mathbb{N}^*$ est une partie de l'ensemble $\mathbb{N}$.

Donc : pour comparer un ensemble avec un autre ensemble on utilise les deux symboles : $\subset$ et $\not\subset$

2) Diviseurs et multiples : Soient : $a\in\mathbb{N}$, $b\in\mathbb{N}^*$.

On dit que a est un multiple de b ou que b est un diviseur de a s'il existe un entier naturel k

Tel que: $a=k\times b$.

3) Critères de divisibilité : Soit n un nombre entier naturel. n est divisible par :

a) **2** si et seulement si son nombre d'unités est : 0, 2, 4, 6 ; 8.

b) **3** si et seulement si la somme de ces chiffres est divisible par 3.

c) **4** si et seulement si le nombre formé par ces deux derniers chiffres est divisible par 4.

d) **5** si et seulement si son nombre d'unités est : 0 ou 5.

e) **9** si et seulement si la somme de ces chiffres est divisible par 9.

3) Parité d'un entier : a) On dit qu'un nombre est pair s'il est un multiple de 2 ou s'il existe un entier naturel k tel que : n = 2.k

b**)** On dit qu'un nombre est impair s'il existe un entier naturel k tel que : n = 2.k + 1

Remarques : Un nombre entier naturel est soit pair soit impair, et on a les résultats suivants :

Nombres	a	b	$a+b$	$a-b$	$a\times b$
Parité des nombres	pair	pair	pair	pair	pair
	impair	impair	pair	pair	impair
	pair	impair	impair	impair	pair

4) Nombres premiers : Un nombre entier naturel est dit premier s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même

Remarques: 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1

2 est le seul nombre premier pair.

Il y a une infinité de nombre premier.

Voici la liste des nombres premiers jusqu'à 200 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.

5) Décomposition en produit de facteurs premiers : Tout entier naturel non premier se décompose en produit de facteurs premiers et cette décomposition est unique.

6) le plus grand commun diviseur :

a) Soient a et b deux entiers non nuls

Le PGCD de a et b est le plus grand diviseur commun des nombres a et b .

On le note : $PGCD(a;b)$ ou $a\wedge b$

b) Le plus grand diviseur commun de deux nombres est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans leur décompositions

7) Le plus petit commun multiple :

a) Soient a et b deux entiers non nuls.

Le PPCM de a et b est le plus petit multiple commun des nombres a et b .

On le note $PPCM(a;b)$ ou $a\vee b$.

b) Le plus petit multiple commun de deux nombres est le produit des facteurs communs et non communs munis du plus grand des exposants trouvés dans leurs décompositions.

L'**arithmétique** : Est une branche des mathématiques qui correspond à la science des nombres.

L'arithmétique s'est au départ limitée à l'étude des propriétés des entiers naturels, des entiers relatifs et des nombres rationnels (sous forme de fractions), et aux propriétés des opérations sur ces nombres. Les opérations arithmétiques traditionnelles sont l'addition, la division, la multiplication, et la soustraction. Cette discipline fut ensuite élargie par l'inclusion de l'étude d'autres nombres comme les réels (sous forme de développement décimal illimité), ou même de concepts plus avancés, comme l'exponentiation ou la racine carrée. *Une* arithmétique est une manière de représenter formellement - autrement dit, « coder » - les nombres (sous la forme d'une liste de chiffres, par exemple) ; et (grâce à cette représentation) définir les opérations de base : addition, multiplication, etc.

Résumé de Cours : Calcul vectoriel dans le plan

I) Vecteurs du plan :

Soient A et B deux points du plan (P) :Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par trois données :

- Une direction : celle d'une droite (AB)
- Un sens de parcours (dans la direction de la droite);
- Une norme (ou longueur) et on note : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$

II) L'égalité de deux vecteurs et Propriétés :

1) Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme

2) $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si $A = B$.

3) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ (L'opposé du vecteur)

4) Pour tout point A du plan $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (le vecteur nul)

5) Soient A ; B; C ; D des points du plan (P) tel que $A \neq B$ et $C \neq D$:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ Signifie que : ABDC est un parallélogramme

6) Soient A ; B ; C ; D des points du plan (P)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ Si et seulement si : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

7) Etant donné un point A et un vecteur $\vec{u}$; il existe un point M unique tel que $\overline{AM} = \bar{u}$.

III) Somme de deux vecteurs et Relation de Chasles :

1) Soit A, B, C trois points du plan. On a la relation suivante : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (Relation de Chasles)

***Remarque* :** Cette relation de Chasles s'utilise de trois manières différentes :

- Tout d'abord, c'est cette relation qui définit la somme de deux vecteurs.
- Cette relation permet de réduire des sommes vectorielles
- Cette relation permet dans les démonstrations d'intercaler des points dans des écritures vectorielles

2) Règle du parallélogramme : Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et A un point du plan

Il existe un point B unique tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et il existe un point C unique tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ tel que ABDC est un parallélogramme

Remarque : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan

La différence de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égale à la somme de $\vec{u}$ et $\left(-\vec{v}\right)$

On écrit : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \left(-\vec{v}\right)$

IV) La multiplication d'un vecteur par un réel :

$\vec{u}$ Un vecteur non nul et un nombre non nul k, on appelle produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre k est le vecteur $k \bullet \vec{u}$ ayant les caractéristiques suivantes:

$k \bullet \vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction, même sens si $k \succ 0$ et de sens contraire si $k \prec 0$

***Remarques* :** $k \bullet \vec{0} = \vec{0}$ ~~et $1 \bullet \vec{u} = \vec{u}$~~ , $(-1) \bullet \vec{u} = -\vec{u}$

Si $k \bullet \vec{u} = \vec{0}$ alors k=0 ou $\vec{u} = \vec{0}$

Propriétés :

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et les nombres a et b dans $\mathbb{R}$:

1) $a\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = a\vec{u} + a\vec{v}$ 2) $\left(a + b\right)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

3) $a\left(b\vec{u}\right) = \left(a \times b\right)\vec{u}$ 4) $1\vec{u} = \vec{u}$

5) $a\left(\vec{u} - \vec{v}\right) = a\vec{u} - a\vec{v}$ 6) $\left(a - b\right)\vec{u} = a\vec{u} - b\vec{u}$

V) La colinéarité de deux vecteurs :

1) Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $\vec{u} = k\vec{v}$.

<u>Remarque :</u> Deux vecteurs non nuls sont colinéaires ssi ils ont la même direction.

<u>2) Propriétés :</u>

a) Trois points A, B et C du plan sont alignés si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

b) Soit (AB) une droite. Alors $M \in (D)$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

c) Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

VI) Milieu d'un segment :

1) Soient A, B et I trois points du plan.

Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

a) I est le milieu du segment [AB]. b) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

c) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

2) Propriété Caractérisation du milieu : Soient A, B et I trois points du plan.

I est le milieu du segment [AB] signifie que : pour tout point M on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Ensemble des nombres réels et sous-ensembles

1) Ensembles de nombres.

a) L'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N}=\{0;1;2;...\}$

b) L'ensemble **des entiers relatifs :** $\mathbb{Z}$

Tous les entiers qu'ils soient négatifs, positifs ou nuls, sont des entiers relatifs : $\mathbb{Z}=\{...;-2-1;0;1;2;...\}$

$\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}-\{0\}=\{...;-2-1;1;2;...\}$ ($\mathbb{Z}$ Privé de 0).

c) L'ensemble des décimaux : $\mathbb{D}$

L'ensemble des décimaux est l'ensemble des nombres dits "à virgule" $\mathbb{D}=\left\{a\times10^{-n}=\frac{a}{10^n}\,/\,a\in\quad;n\in\quad\right\}$

d) L'ensemble des rationnels : $\mathbb{Q}$

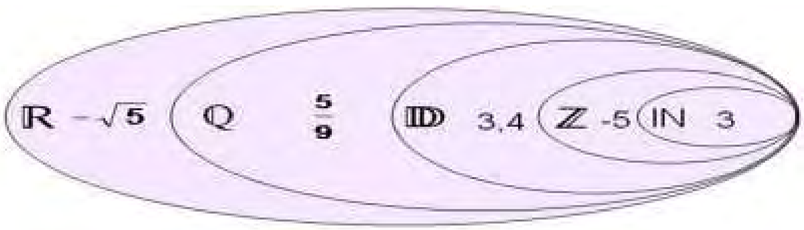
Les nombres rationnels sont les fractions de la forme $\frac{a}{b}$: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,/\,a\in\mathbb{Z};b\in\mathbb{N}^*\right\}$

e) L'ensemble des réels : $\mathbb{R}$. Tous les nombres utilisés jusqu'à présent sont des réels.

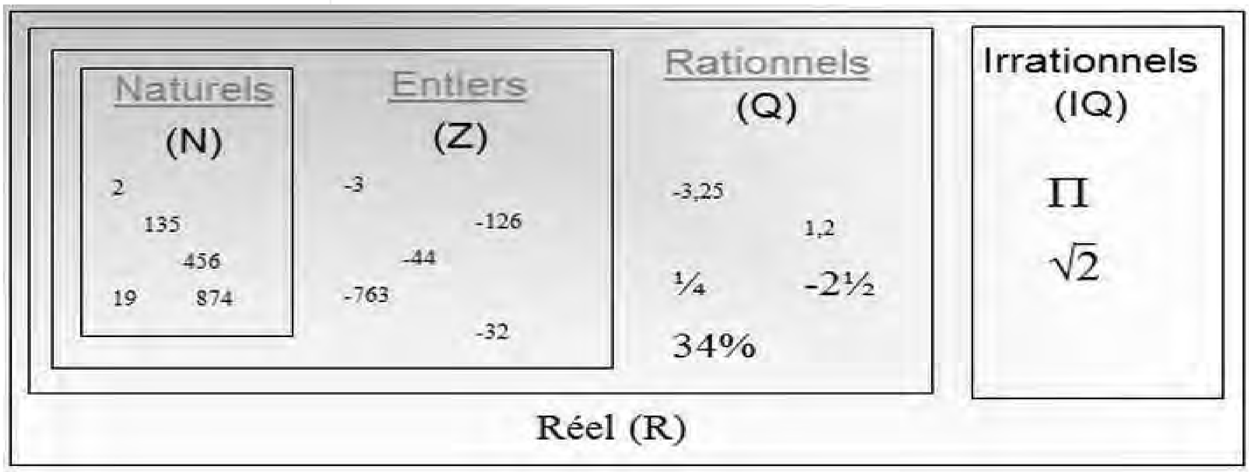
$\mathbb{R}^+$ Désigne l'ensemble des réels positifs (avec zéro).

$\mathbb{R}^-$ Désigne l 'ensemble des réels négatifs (avec zéro) et $\mathbb{R}^*$ est l 'ensemble des réels non nuls

$\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs
D : ensemble des nombres décimaux
$\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels



$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$



Remarque :

a) Pour déterminer les éléments communs à deux ensembles donnés A et B on utilise le symbole $\cap$

Exemple : si : $A=\{-3;4;5;6\}$ et $B=\{3;4;5;8\}$ alors : $A\cap B=\{4;5\}$

b) Pour réunir deux ensembles donnés A et B on utilise le symbole $\cup$

Exemple : si : $A=\{-3;4;5;6\}$ et $B=\{3;4;5;8\}$ alors : $A\cup B==\{-3;3;4;5;6.8\}$

c) L'ensemble vide : $\varnothing$ est l'ensemble qui ne contient aucun éléments.

d) On a: $\mathbb{R}^+\cup\mathbb{R}^-=\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^+\cap\mathbb{R}^-=\{0\}$; $\mathbb{R}^{+*}\cap\mathbb{R}^-=\varnothing$

2) Opérations et règles de calcul dans l'ensemble des nombres réels :

Si: $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$ et $d\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{R}$ alors on a : $a+b=b+a$; $a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$

$-a$: Est l'opposé de a et $(-a)+a=a+(-a)=0$ et $a+0=0+a=a$ et $a-b=a+(-b)$ et $-(a-b)=-a+b$

$a\times b=b\times a=ab=ba$ et $a(bc)=(ab)c=(ac)b=abc$

Si : $a \neq 0; a \times \frac{1}{a} = 1$: $\frac{1}{a}$ l'inverse de a et on a : $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$

$k(a+b) = ka + kb$ et $k(a-b) = ka - kb$

$(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$

Si $bd \neq 0$ $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ et $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ et $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$ et $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ et $k \times \frac{a}{b} = \frac{ak}{b}$ et $\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}; bc \neq 0$ et $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Si on a : $\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}$ alors $a + c = b + d$.

Si $bd \neq 0$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si ad=bc .

$\frac{a}{b} = 0$ Si et seulement si : $a = 0$.

3) Racine carrée : a) a est un nombre **positif**.

La racine carrée de a notée : $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est égal à a

b) Si a et b deux nombres positifs ou nuls alors :

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a^2} = a$; $\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}; n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}; b \succ 0$; $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

$a \in \mathbb{R}^+$: $x^2 = a$ si et seulement si $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

4) Les Puissances :a) $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Le produit de n facteurs égaux à a et noté a^n et s'appelle la puissance $n^{\text{ième}}$ de a » ; n est appelé exposant

$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{nfois}$ Cas particulier : $a^1 = a; a^0 = 1$

Et on a : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ en particulier : pour a ≠ 0 on a : $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$10^n = \underbrace{1000\cdots0}_{n}; n \in \mathbb{N}$ (n zéros) et $10^{-n} = \underbrace{0,000\cdots01}_{n}; n \in \mathbb{N}$ (n zéros)

$10^1 = 10$; $10^{-1} = 0{,}1$; $10^{-2} = 0{,}01$; $10^0 = 1$

b) Propriétés des puissances : $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$; $m \in \mathbb{N}^*$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ et $a^n \times b^n = (ab)^n$; $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$; $a^n \times a^m = a^{n+m}$; $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

4) Écriture scientifique d'un nombre décimal : La notation scientifique d'un nombre décimal est de la forme $a \times 10^p$ où a est un nombre décimal ($1 \leq a \prec 10$) et p un nombre entier relatif.

5) Identités Remarquables : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ 4) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

5) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ Somme de deux cubes

6) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ Cube d'une Somme

7) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ Cube d'une différence

Ces formules sont pour développer et pour factoriser

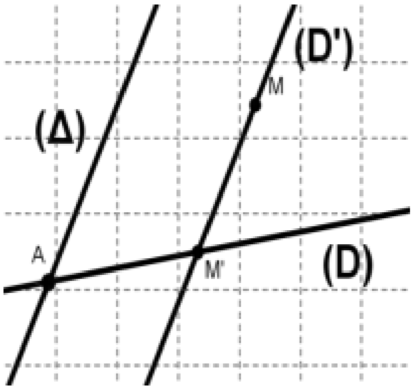
<u>Factoriser</u> c'est écrire sous la forme d'un produit

Résumé de Cours : La projection

1) La projection sur une droite parallèlement à une autre droite

a)Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un pont A , et soit M un point du plan ; la droite qui passe par M et parallèle à (Δ) coupe (D) en un point M'

le point M' s'appelle la projection du point M sur (D) parallèlement à (Δ) ou le projeté M sur (D) parallèlement à (Δ) ou l'image du point M par la projection $P_{(D;\Delta)}$ sur (D) parallèlement à (Δ) et on écrit : $P_{(D;\Delta)}(M) = M'$ ou $P(M) = M'$



La droite (Δ) s'appelle la direction de la projection.

: M' L'image du point M par la projection P

si $B \in (D)$ alors $P(B) = B$ on dit alors que le point B est invariant par la projection P

2) Propriétés

■Chaque point de (D) est confondu avec sa projection

■Est tout point confondu avec sa projection est un point de (D)

■On dit que la droite (D) est globalement invariante par la projection sur (D) parallèlement à (Δ)

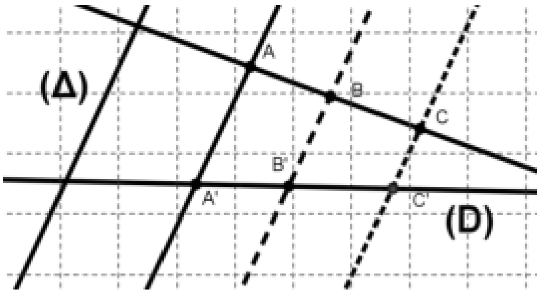
■L'image du segment [AB] par la projection P est le segment $[A'B']$ et on écrit : $P([AB]) = [A'B']$

■La projection conserve les milieux

Remarque : Si les droite (D) et (Δ) sont perpendiculaire

On dit que M' est la projection orthogonale de M sur (D)

3) Théorème de Thales : Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un point et soient A ; B; C trois points alignés du plan tel que (AB) et (Δ) ne sont pas parallèles



Soient A' ; B' ; C' et D' respectivement les projetés des points A ; B; C et D sur (D) parallèlement à (Δ)

a)Alors : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B'}{A'C'}$

b) Si : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ avec $k \in \mathbb{R}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$

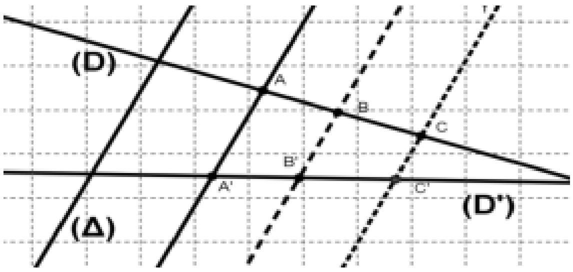
La projection conserve le coefficient d'alignement de trois points

c) Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ Alors : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{C'D'}$

La projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

4) Le théorème réciproque de Thalès : Soient (D) et (D') deux droites non parallèles a une troisième (Δ)

Soient A ; B deux points de la droite (D) tel que A' et B' respectivement les projetés des points A ; B sur (D') parallèlement à (Δ).



Si C un point de la droite (D) et C' un point de la droite (D') tel que $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B'}{A'C'}$

Et les points A ; B et C sont dans le même ordre sur la droite (D) que les points A' ; B' et C' sur la droite (D')

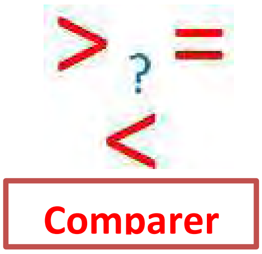
Alors : le point C' est la projection de C sur la droite (D') parallèlement à (Δ) et on a $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$

L'ordre dans $\mathbb{R}$ et opérations

I) L'ordre dans $\mathbb{R}$: Comparer deux nombres réels *a* et *b*, c'est chercher à savoir quel est le plus grand (ou s'ils sont égaux).

1) Soient a et b deux réels : $a \leq b$ se lit « a inférieur ou égal à b » ce qui équivaut à $(b-a) \in \mathbb{R}^+$ ou $b-a \geq 0$.

$b \geq a$ se lit « b supérieur ou égal à a » ce qui équivaut à $(b-a) \in \mathbb{R}^+$ ou $b-a \geq 0$.



a < b se lit « a strictement inférieur à b » ce qui équivaut à $b-a > 0$.
a > b se lit « a strictement supérieur à b » ce qui équivaut à $b-a < 0$.
Ainsi, comparer *a* et *b* revient à étudier le signe de : *a* – *b*.

2) L'ordre et les opérations dans $\mathbb{R}$.

a) Soient a et b et c trois nombres réels.

✓ Si $a \leq b$ Alors $a+c \leq b+c$ et $a-c \leq b-c$

✓ Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a+c \leq b+d$

b) $ab \geq 0$ Signifie que : $a \geq 0$ et $b \geq 0$ ou $a \leq 0$ et $b \leq 0$
(Le produit de deux réels de même signe et toujours positif)

c) Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors : $ac \leq bc$
Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors : $ac \geq bc$

d) si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.
Si $0 \leq a \leq b$ alors : $a^2 \leq b^2$ et $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

e) Si $a \leq b \leq 0$ alors : $a^2 \geq b^2$.

f) Si $ab > 0$ et $a \leq b$ on a : alors : $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

3) La valeur absolue : La valeur absolue d'un nombre x se note entre deux barres verticales : | x | et se lit : valeur absolue de x

Si $x \geq 0$ alors : $|x| = x$ et Si $x \leq 0$ alors : $|x| = -x$

Exemples : | 4 | = 4 car 4 > 0 et : | -5 |= -(-5)=5 car -5 < 0

Remarque : Si x est un nombre réel, $|x^2| = x^2$ car $x^2 \geq 0$.

c) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et soient A et B les points d'abscisses respectives a et b sur un axe normé (gradué)

La distance entre a et b c'est la distance AB et on la note : $AB = |a-b|$ et on a : $|a-b| = |b-a|$

c) Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}^+$ alors on a : $|x| \geq 0$; $|-x| = |x|$; $|x^2| = |x|^2 = x^2$; $-|x| \leq x \leq |x|$

$\sqrt{x^2} = |x|$; $|x \times y| = |x| \times |y|$; $\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|y|}$ si $y \neq 0$ et $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$; $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Inégalité du Triangle)

$|x| = a$ Équivaut à dire que : $x = a$ ou $x = -a$

$|x| = |y|$ Équivaut à dire que : $x = y$ ou $x = -y$

Dire que $|x| = 0$ équivaut à dire que : $x = 0$.

4) Intervalles et inégalités :

Les intervalles réels sont des parties de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
Leur représentation sur la droite numérique est un segment ou une droite dont les extrémités peuvent être exclues. C'est d'ailleurs ce qui fait qu'un intervalle est ouvert ou fermé.
→ La notation +∞ se lit "plus l'infini". Contrairement à ce que l'on pourrait croire, +∞ n'est pas un nombre. C'est juste un symbole pour désigner le "bout positif et infiniment grand" de l'ensemble des réels.
→ La notation -∞ se lit elle "moins l'infini".

a)Les différents types d'intervalles :

Dans le tableau ci-dessous, a et b sont deux réels tels que : a ≤ b.

Notation	Représentation sur la droite réelle	Ensemble des réels x tels que	Appellation
[a ; b]		**a ≤ x ≤ b**	**Intervalle fermé borné**
[a ; b[		**a ≤ x < b**	**Intervalle borné semi - ouvert (fermé en a et ouvert en b)**
]a ; b]		**a < x ≤ b**	**Intervalle borné semi-ouvert (ou ouvert à gauche et fermé à droite)**
]a ; b[		**a < x < b**	**Intervalle ouvert borné.**
]-∞ ; b]		**x ≤ b**	**Intervalle non borné fermé en b (ou fermé à droite)**
]-∞ ; b[		**x < b**	**Intervalle non borné ouvert en b (ou ouvert à droite)**
[a ; +∞ [		**a ≤ x**	**Intervalle non borné fermé en a (ou fermé à gauche)**
]a ; +∞ [		**a < x**	**Intervalle non borné ouvert en a (ou ouvert à gauche)**

b) Quelques remarques sur ce tableau :

La notation {x tels que a < x < b} désigne l'ensemble des réels x tels que a < x < b (sous-entendu qui sont strictement plus grand que a et strictement inférieur à b).

Le fait de dire qu'un intervalle est par exemple ouvert en b signifie que le réel b ne fait pas partie de celui-ci. Par contre, s'il y avait été fermé alors il en aurait fait partie.

Du côté de -∞ et de +∞, le crochet est toujours ouvert

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ se note aussi :]-∞ ; +∞[.

$\mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$ et $\mathbb{R}^- =]-\infty,0]$ et $\mathbb{R}^*_+ =]0,+\infty[$ et $\mathbb{R}^*_- =]-\infty,0[$

<u>c) Réunion et intersection d'intervalles et milieu et amplitude et rayon .</u>

L'**intersection** de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant **à la fois** aux deux intervalles.

La **réunion** de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant à l'un **ou** l'autre de ces intervalles (les éléments de l'intersection appartiennent aussi à la réunion).

d) <u>Milieu et amplitude et rayon d'un intervalle :</u> Soient *a, b* deux nombres réels tels que : $a \le b$.

On pose $I = [a;b]$ ou $I =]a;b[$ ou $I = [a;b[$ ou $I =]a;b]$.

Le réel $\frac{a+b}{2}$ est le **milieu** de l'intervalle I et Le réel $b-a$ est **l'amplitude** de l'intervalle I

Le réel $\frac{b-a}{2}$ est le **rayon** de l'intervalle I

e) Les intervalles et la valeur absolue : $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$

$|x| \leq r$ Signifie que : $-r \leq x \leq r$ signifie que : $x \in [-r;r]$

$|x| \geq r$ Signifie que : $x \geq r$ ou $x \leq -r$

5) L'encadrement et la valeur approchée

5-1) Encadrement : Réaliser un encadrement du réel x, c'est trouver deux nombres assez proche a et b Tel que, a < x < b ou a ≤ x ≤ b ou a <x ≤ b ou a ≤ x < b
Chacun de ces doubles égalités s'appelle un encadrement du réel x d'amplitude : b-a
Plus cette amplitude est réduite et plus l'encadrement est précis.
a s'appelle une approximation du réel x par défaut à b-a près (ou avec la précision b-a)
b s'appelle une approximation du réel x par excès à b-a près (ou avec la précision b-a)

5-2) Encadrements et opérations.

<u>- Encadrements et additions</u> : Considérons deux réels x et y tels que : $a < x < b$ et $c < y < d$
Alors on a : a+c < x+y < b+d.
<u>Remarque</u> **:** Pour encadrer le résultat d'une différence a-b
On commencera par encadrer - b avant…

<u>-Encadrements et multiplications</u> : Considérons deux nombres réels **positifs** x et y tels que :
$0 < a < x < b$ et $0 < c < y < d$.
Le produit xy est alors encadrée par ac et bd c'est-à-dire : $ac < xy < bd$.
Il suffit de multiplier les bornes des encadrements de x et y pour obtenir un encadrement de xy.
Remarque : *Pour encadrer le résultat d'une division, on commencera par la remplacer par une multiplication (diviser c'est multiplier par l'inverse).*

5-3) Valeur approchée d'un nombre.

a) Soit a et x deux nombres et r un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r) lorsque : $|x-a| \leq r$.

b) Soit a et x deux nombres et r un nombre strictement positif.
On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r), par défaut, lorsque : $a \leq x \leq a+r$.
On dit que : a est une valeur approchée de x à r près, par excès, lorsque : $a-r \leq x \leq a$.

<u>Exemples:</u> 1) On a $1,38 < \sqrt{2} < 1,42$ donc $1,40-0,02 < \sqrt{2} < 1,40+0,02$

$-0,02 < \sqrt{2}-1,40 < 0,02$ Donc : $|\sqrt{2}-1,40| < 0,02$

Donc : $1,40$ est une valeur approchée du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

2) On a $1,40 \leq \sqrt{2} < 1,40+0,02$ donc $1,40$ est une valeur approchée par défaut du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

3) On a $1,42-0,02 < \sqrt{2} < 1,42$ donc $1,42$ est une valeur approchée par excès du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

5-4) Approximation décimale : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$

Si $N \times 10^{-p} \leq x \leq (N+1) \times 10^{-p}$ alors :

$N \times 10^{-p}$ S'appelle une approximation décimale du nombre x par défaut à 10^{-p} près.

$(N+1) \times 10^{-p}$ S'appelle une approximation décimale du nombre x par excès à 10^{-p} près.

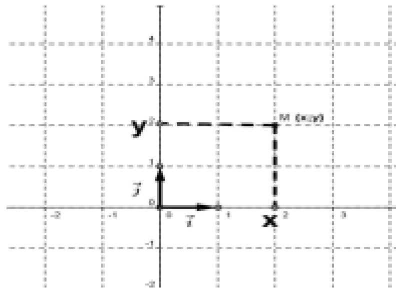
Exemple : on a $0,333333 < \frac{1}{3} < 0,333334$ donc $333333 \times 10^{-6} < \frac{1}{3} < (333333+1) \times 10^{-6}$

333333×10^{-6} Est une approximation décimale du nombre x par défaut à 10^{-6} près

$(333333+1) \times 10^{-6}$ Est une approximation décimale du nombre x par excès à 10^{-6} près

Résumé de Cours : La droite dans le plan

1) Repère et coordonnées d'un point et coordonnées d'un vecteur



a) Repère : Soient O. I et J trois points non alignés dans le plan P.
Le triplet (O ; I ; J) détermine un repère dans le plan. le point O est l'origine du repère (O ; I ; J)
La droite (O I) est l'axe des abscisses du Repère (O ; I ; J)
La droite (O J) est l'axe des ordonnées du Repère (O ; I ; J)
Si les droites (O I) et (O J) sont perpendiculaires Ont dit que le Repère est orthogonal.
Si on a : OI =OJ = 1 on dit que le Repère (O ; I ; J) est normé
Si les droites (O I) et (O J) sont perpendiculaires et si on a OI =OJ = 1
On dit que le repère (O ; I ; J) est orthonormé
On pose $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ on note alors le repère (O ; I ; J) par $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

b) Les coordonnées d'un point : Le plan est rapporté au Repère (O ; I ; J).pour tout point M du plan il existe un unique couple (x,y) tel que $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ et on a : $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OI}+y\overrightarrow{OJ}$
Le couple (x,y) est le couple de coordonnée de M et on note $M(x,y)$:
x est l'abscisse du point M et y est l'ordonnée du point M

c) Les coordonnées d'un vecteur : Le plan est rapporté au Repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$
Le couple de coordonnée d'un vecteur $\vec{u}$ est le couple de coordonnée du point M tel que : $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ et on note : $\vec{u}(x,y)$

d) Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et soient $A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$; $I(x_I;y_I)$ trois points dans le plan et $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs on a alors : $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$ et $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.
Le milieu I du segment [AB] à pour coordonnées : $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.
$\vec{u}(x;y)=\vec{v}(x';y')$ Équivaut à : $x'=x$ et $y=y'$.
$\vec{u}+\vec{v}(x+x';y+y')$ et $\vec{u}-\vec{v}(x-x';y-y')$ et $\vec{u}+\vec{v}=(x+x')\vec{i}+(y+y')\vec{j}$.
Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ on a : $\alpha\bullet\vec{u}(\alpha x;\alpha y)$.

2) Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs :
Dans la suite de ce cours le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$
Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs.
a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{u}=\alpha\bullet\vec{v}$
b) Deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont colinéaires si et seulement si : $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=xy'-x'y=0$.

3) La droite dans le plan : a)Un vecteur directeur d'une droite (D) est un vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite (D).
b) Deux points distincts quelconques de la droite (D) définissent un vecteur directeur de cette droite.
c)Deux droites (D) et (D') sont parallèles si tout vecteur directeur de l'une est aussi vecteur directeur de l'autre.
d**)** Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point du plan.
L'ensemble des points M du plan tel qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}$ est la droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par A qu'on note : $D\left(A;\vec{u}\right)$ donc : $D\left(A;\vec{u}\right)=\left\{M\in P/\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}\right\}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$
C'est la définition vectorielle d'une droite.

4) Représentation paramétrique d'une droite : Soit $\vec{u}(a;b)$ un vecteur non nul et $A(x_A;y_A)$ un point du plan et $t\in\mathbb{R}$; Le système : $\begin{cases} x = ta + x_A \\ y = tb + y_A \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de $D(A;\vec{u})$

5) Equations cartésiennes d'une droite :

a) Toute droite (D) admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$

Avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$ et $a\neq 0$ ou $b\neq 0$ et L'ensemble des points M (x ; y) vérifiant l'équation : ax+ by + c = 0 est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$.

4) Positions deux droites dans le plan :

Deux droites (D) et (D') d'équations respectives (D): $ax + by + c = 0$ et (D') : $a'x + b'y + c' = 0$

Sont parallèles si et seulement si : $ab' - a'b = 0$

Résumé de Cours les polynômes

I) Définition d'un polynôme

a) L'expression : $V\left(x\right)=x^3+8x^2+15x$ est appelée polynôme de degré 3 on note : $\deg V$ = 3.

Les réels 1, 8, 15,0 sont appelés coefficients du polynôme $V\left(x\right)$.

$8x^2$ Est un monôme de degré 2 et de coefficient 8.
x^3 Est un monôme, de degré 3 et de coefficient 1.
$15x$ Est un monôme, de degré 1 et de coefficient 15.

b) Un polynôme est une somme de monômes.
Un polynôme de la variable x sera noté souvent $P\left(x\right),Q\left(x\right)$, ...

Le degré du polynôme P noté : $\deg P$ est celui de son monôme de plus haut degré.

c) Remarque et exemples :

- $P\left(x\right)=3x^4+x^3-7x+\sqrt{3}$ Est un polynôme de degré 4 ordonné suivant les puissances décroissantes.
- Son terme constant (le terme sans la variable x) est $\sqrt{3}$
- $R\left(x\right)=x^3+3x^2-\dfrac{2}{x}-1$ n'est pas un polynôme et $E\left(x\right)=\sqrt{x}+x^2-3$ n'est pas un polynôme
- $F\left(x\right)=2=2x^0$ Est un polynôme de degré 0 et s'appelle un polynôme constant.
- Un polynôme de degré 2 s'appelle un trinôme.

Donc un trinôme c'est un polynôme qui s'écrit sous la forme : $T\left(x\right)=ax^2+bx+c$

Avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$

d) Deux polynômes P et Q sont égaux et on écrit P = Q si $P\left(x\right)=Q\left(x\right)$ Pour tout x réel

e) Deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.

2) Opérations sur les polynômes :

a) La somme de deux polynômes : Soient P et Q deux polynômes

La somme de P et Q est un polynôme noté $P+Q$

Tel que : $(P+Q)(x)=(P)(x)+(Q)(x)$ Pour tous $x\in\mathbb{R}$ **et** on a : $\deg(P+Q)\le\max\left(\deg(P);\deg(Q)\right)$

b) Le produit d'un polynôme par un réel : Soient P un polynôme et $\alpha\in\mathbb{R}^*$.
Le produit de P par un réel α est un polynôme noté αP et tel que :
$(\alpha P)(x)=\alpha\times(P)(x)$ Pour tout $x\in\mathbb{R}$ **et** on a : $\deg(\alpha P)=\deg(P)$

c) Le produit de deux polynômes : Soient P et Q deux polynômes non nuls

Le produit de P et Q est un polynôme noté $P.Q$ et tel que : $(P.Q)(x)=(P)(x)\times(Q)(x)$ $x\in\mathbb{R}$

Et on a : $\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$.

3) La division euclidienne d'un polynôme par x - a et factorisation

a) Soit P un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}$ et soit $a\in\mathbb{R}$

Alors il existe un unique polynôme Q de degré $n-1$ et tel que : $P(x)=(x-a)Q(x)+P(a)$ pour tous $x\in\mathbb{R}$

Cette égalité est la division euclidienne de $P\left(x\right)$ par : $x-a$ et $Q\left(x\right)$ est le quotient et $P\left(a\right)$ le reste.

b) Soit P un polynôme et soit $a\in\mathbb{R}$.
On dit que a est racine du polynôme P si et seulement si $P\left(a\right)=0$

c) Soit P un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $a\in\mathbb{R}$; a est racine du polynôme P ssi $P\left(x\right)$ est divisible par $x-a$.

Equations et inéquations et systèmes partie1
Résumé de Cours

1°) Les équations du premier degré a une inconnue.

a)On appelle équations du premier degré a une inconnue toute équation de la forme : $ax+b=0$ où les coefficients a, b sont des réels donnés et x est l'inconnue

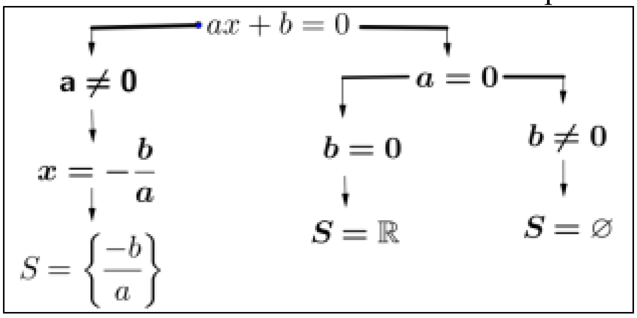
Résoudre l'équation c'est déterminer l'ensemble de toutes les solutions notées : S

b) Résolution de l'équation : $ax+b=0$

Si $a\neq 0$ alors : $x=-\frac{b}{a}$ donc une solution unique et par suite : $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$

Si $a=0$ et $b=0$ alors on a : $0x+0=0$ donc : $S=\mathbb{R}$

Si $a=0$ et $b\neq 0$ alors on a : $0x+b=0$ pas de solutions donc : $S=\varnothing$



2°) Les inéquations du premier degré a une inconnue.

a) Le signe du binôme $ax+b$ $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$

Résumé : $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	signe de $-a$	0	signe de a

b) Solution de l'inéquation du premier degré a une inconnue

Définition : On appelle inéquations du premier degré a une inconnue toute inéquation de la forme : $ax+b\geq 0$ ou $ax+b\leq 0$ ou $ax+b<0$ ou $ax+b>0$ où les coefficients a, b sont des réels donnés et x est l'inconnue

Résoudre l'inéquation c'est déterminer l'ensemble de toutes les solutions notées : S

3°) Les équations et les inéquations du premier degré avec deux inconnues.

a) On appelle équation du premier degré a deux inconnues toute équation de la forme : $ax+by+c=0$ où les coefficients a, b et c sont des réels donnés et le couple $(x;y)$ est l'inconnue dans $\mathbb{R}^2$.

Résoudre l'équation dans $\mathbb{R}^2$ c'est déterminer l'ensemble S des couples solutions de l'équation.

Remarque :

- L'équation $ax+by+c=0$ à une infinité de solutions dans $\mathbb{R}^2$.
- On peut résoudre l'équation : $ax+by+c=0$ graphiquement ou algébriquement.

4) les inéquations du premier degré avec deux inconnues.

Une inéquation à deux inconnues ne se résout pas par le calcul, mais graphiquement.

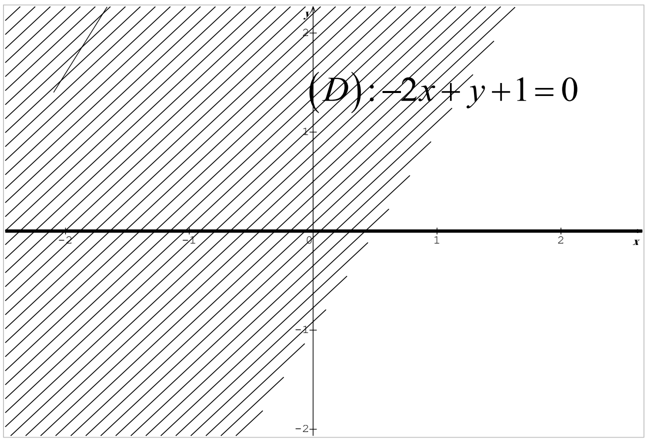
Pour résoudre graphiquement une inéquation du premier degré à deux inconnues : par ex : $ax+by+c\geq 0$

- On trace la droite d'équation : $(D): ax+by+c=0$;

- On prend un point M quelconque n'appartenant pas à (D). On détermine si le couple de coordonnées $(x_M;y_M)$ de M est solution de l'inéquation ;

- Si le couple $(x_M;y_M)$ est solution, les solutions de l'inéquation sont les couples de coordonnées des points qui sont dans le même demi-plan que M.

Sinon, les solutions de l'inéquation sont les couples de coordonnées des points qui sont dans le demi-plan qui ne contient pas M.
-On hachure la région du plan qui convient.
Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation : y -2x + 1 > 0
Solution : On trace la droite d'équation : (D) y - 2x + 1 = 0 (1)



Cette droite partage le plan en deux demi- plans.
On peut observer le graphe ci-dessus :
-Tous les points de la zone « hachuré» ont les coordonnées qui vérifient : y -2x + 1 > 0
- Tous les points de la zone «non hachuré» ont les coordonnées qui vérifient : y -2x + 1 < 0
Soit un point. (Choisi au hasard)
Par exemple O (0 ; 0) :
On peut essayer de savoir si le point O (0 ;0) appartient à la zone « y -2x + 1 > 0 » ou à la zone « y -2x + 1 < 0 » en remplaçant y=0 et x=0 dans l'équation « y -2x + 1 = 0 » ;
Le résultat donne « 1 » ; donc le point O appartient à la zone « y -2x + 1 > 0 »
Donc : les coordonnes (0 ; 0) vérifie l'inéquation.
Donc les solutions de l'inéquation y-2x + 1 > 0 est l'ensemble des couple $(x;y)$ des points $M(x;y)$ du demi- plan (La zone « hachuré») qui contient le point $O(0;0)$ privé de la droite (D).
Remarque :1) Si la droite passe par l'origine, on 'essaie » un autre point bien choisi.
Si l'inégalité est au sens large, on doit « ajouter » aux points du demi -plan les points de la droite frontière ».

5) Résolution graphique d'un système d'inéquations à deux inconnues :
Pour résoudre graphiquement un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues :
- On trace dans un même repère les droites d'équation : $ax + by + c = 0$ correspondant aux inéquations.
- On hachure pour chaque inéquation la région du plan dont les coordonnées (x ;y) des points sont solutions ;
- Les solutions du système sont les coordonnées des points de la partie du plan hachurée.

Résumé de Cours
Equations et inéquations et systèmes partie3 :
Equation du second degré

1) Equation du second degré a une inconnue.

Une équation du second degré a une inconnue est une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels avec $a\neq 0$.Une solution de cette équation s'appelle une racine du trinôme : ax^2+bx+c .

2) Résolution d'une équation du second degré a une inconnue.

a) Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2=a$ (dépendent du signe de a)

- Si a < 0, alors l'équation n'a pas de solution.
- Si a = 0, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.
- Si a > 0, alors l'équation possède deux solutions qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

b) Soit le du trinôme ax^2+bx+c avec $a\neq 0$.

✓ Le trinôme peut s'écrire sous la forme dite la forme canonique :

$ax^2+bx+c=a\left[\left(x-\alpha\right)^2+\beta\right]$ Avec : $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$

c) Soit l'équation : $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels avec $a\neq 0$ et soit $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant

- Si $\Delta<0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution réelle c'est-à-dire : $S=\varnothing$

Et on ne peut pas factorisée le trinôme ax^2+bx+c

- Si $\Delta=0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ à une seule solution (dite double) : $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ c'est-à-dire : $S=\left\{x_0\right\}$

Et le trinôme ax^2+bx+c à une forme factorisée : $ax^2+bx+c=a\left(x-x_0\right)^2$

- Si $\Delta>0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ à deux solutions distinctes : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

C'est-à-dire : $S=\left\{x_1;x_2\right\}$ et le trinôme ax^2+bx+c a une forme factorisée : $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$

c) Soit le trinôme ax^2+bx+c tel que son discriminant $\Delta>0$ .Si x_1 et x_2 sont les racines du trinôme alors :

$x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}$ et $x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$

d) Le système : $\left(I\right)\begin{cases}x+y=s\\ x\times y=p\end{cases}$ où les s , p sont des réels donnés admet une solution dans $\mathbb{R}^2$

si et seulement si $s^2-4p\geq 0$ et dans ce cas x , y sont solutions de l'équation : $x^2-sx+p=0$

e) L<u>e discriminant réduit d'un trinôme :</u> Soit le trinôme ax^2+bx+c

Si b est pair c'est-à-dire : $b=2b'$ on parle du discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ et on a :

- Si $\Delta'<0$: pas de solution réelle c'est-à-dire : $S=\varnothing$
- Si $\Delta'=0$: L'équation a une seule solution (dite double) : $x_0=-\dfrac{b'}{a}$.
- Si $\Delta'>0$: L'équation a deux solutions distinctes : $x_1=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$

3) Inéquation du second degré a une inconnue :

Résumé :

Si $\Delta > 0$ le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines et le signe contraire de a entre les racines

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a

Si $\Delta < 0$: le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	Signe de a

Si $\Delta = 0$: le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

Systèmes : partie2
Résumé de Cours

1) On appelle système de deux équations du premier degré à deux inconnues toute système de la forme :

$(I)\ \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, où les coefficients a, b, c , d sont des réels donnés et le couple (x,y) est l'inconnue

Dans $\mathbb{R}^2$ résoudre le système (I) c'est déterminer l'ensemble S des solutions c'est-à-dire l'ensemble des couples (x,y) qui vérifient les deux équations:

$ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$ simultanément

2) Pour Résoudre un système (I) on utilise généralement quatre méthodes :

- Méthode de substitution.
- Méthode de combinaison linéaire ou addition.
- Méthode des déterminants.
- Méthode graphique.

a) Méthode de substitution : Substituer, c'est remplacer par (Mettre à la place de).

Exemple : Dans le système $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$, on exprime x en fonction de y dans la première équation et on obtient le système équivalent :

$\begin{cases} x=3-2y \\ 2x+3y=4 \end{cases}$.

On remplace ensuite x par $3-2y$ dans la seconde équation, ce qui donne le système :

$\begin{cases} x=3-2y \\ 2(3-2y)+3y=4 \end{cases}$ ce qui signifie que :

$\begin{cases} x=3-2y \\ -y+6=4 \end{cases}$ soit encore à $\begin{cases} x=3-2y \\ y=2 \end{cases}$

Et on remplace y par 2 dans la première équation on trouve $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ donc: $S=\{(-1,2)\}$

b) Méthode de combinaison linéaire ou méthode par addition : Cette méthode consiste à faire apparaître des coefficients opposés pour l'une des inconnues, en multipliant les équations par des

Exemple : Dans le système $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$, on multiplie les termes de la première équation par 2 et ceux de la seconde par 3 et on obtient le système équivalent : $\begin{cases} 4x+6y=14 \\ 9x-6y=12 \end{cases}$.

On additionne membre à membre les deux équations et on remplace la seconde équation du système par le résultat ; on obtient le système

$\begin{cases} 4x+6y=14 \\ 13x=26 \end{cases}$ équivalent : $\begin{cases} 8+6y=14 \\ x=2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 6y=6 \\ x=2 \end{cases}$

encore ou $\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$.

On en déduit le couple solution : $S=\{(2,1)\}$.

Remarque : Un système peut n'avoir aucune solution ou encore une infinité de solutions.

Soit le système : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

Si les coefficients de x et de y sont proportionnels c'est-à-dire si : $ab'=a'b$ ce système a une infinité de solutions ou pas de solutions

– Si de plus : $ac'\neq a'c$ alors le système n'a pas de solution ;

– Si $ac'=a'c$ (les coefficients des deux équations sont proportionnels), alors le système a une infinité de solutions.

c)Méthode des déterminants : Soit le système de deux équations à deux inconnues suivant

$(I)\ \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ et $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$

son déterminant.

- Si $\Delta\neq 0$ alors le système (I) admet un couple solution unique :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{cb'-c'b}{\Delta} \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{ac'-a'c}{\Delta}$$

Donc : $S=\{(x;y)\}$

- Si $\Delta\neq 0$ alors :

✓ Si $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$ alors : les deux équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ sont équivalentes et dans ce cas résoudre le système c'est résoudre l'une des équations par exemple en choisi : $ax + by = c$ et alors on a :

$S = \left\{ \left(x; \frac{c - ax}{b} \right) / x \in \mathbb{R}; b \neq 0 \right\}$

✓ Si $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$ alors le système (I) n'admet aucun couple solutions et donc $S = \varnothing$

3)Mise en équation d'un problème à deux inconnues

Rappel des quatre étapes dans la résolution d'un problème à deux inconnues.

- ✓ 1ère étape : choix de l'inconnue (ou des inconnues)
- ✓ 2ème étape : mise en équations du problème
- ✓ 3ème étape : résolution de l'équation (ou du système d'équations)
- ✓ 4ème étape : vérification des résultats

Exemple de problème : Dans une boulangerie, Ali a acheté deux croissants et un pain il a payé 6 dh 50

Dans la même boulangerie, Aicha à acheter un croissant et trois pains et elle a payé 5dh 50.

Quel est le prix d'un croissant et d'un pain dans cette boulangerie ?

Méthode de résolution : Pour résoudre un problème avec deux inconnues :

1. On pose **x= "**la première inconnue" et **y =** "la deuxième inconnue".

Pour ce problème, on écrit : "J'appelle x le prix d'un croissant et y le prix d'un pain "

Ou : "Soit x le prix d'un croissant et y le prix d'un pain ".

2. On écrit les équations correspondant au problème : $2x + 1y = 6.5$ et $1x + 3y = 5.5$

On place les équations l'une en dessous de l'autre dans une grande accolade : $\begin{cases} 2x + 1y = 6.5 \\ 1x + 3y = 7 \end{cases}$

3. On résout le système avec l'une des trois méthodes on trouve : $x = 2,5$ et $y = 1,5$

4. Vérification des résultats : $\begin{cases} 2 \times 2.5 + 1 \times 1.5 = 6.5 \\ 1 \times 2.5 + 3 \times 1.5 = 7 \end{cases}$

Interprétation graphique du système de deux équations du premier degré a deux inconnues :

$(I) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$; Soit (d) et (d') deux droites d'équations respectives : ax + by - c = 0 **et** a'x + b'y - c' = 0.

Soit M (u;v) un point du plan.

Dire que (u;v) est solution du système (I) revient à dire que le point M appartient à la fois à (d) et (d'). On distingue alors trois cas :

Si (d) et (d') sont parallèles et distinctes, le système (S) n'admet aucun couple solution.

Si (d) et (d') sont sécantes, le système (S) admet une solution unique.

Si (d) et (d') sont confondues alors le système (S) admet une infinité de couples solutions.

Conclusion : Résoudre (S) revient à étudier la position relative des droites (d) et (d')

Résumé : STATISTIQUES

La statistique a pour objet de recueillir des observations portant sur des sujets présentant une certaine propriété et de traduire ces observations par des nombres qui permettent d'avoir des renseignements sur cette propriété.
Le but de la statistique descriptive est de structurer et de représenter l'information contenue dans les données

1) Vocabulaire :

La population est l'ensemble des sujets étudiée
Individu : c'est un élément de la population.
Effectif total : c'est le nombre total d'individus.
Caractère : c'est la propriété étudiée.
On distingue les caractères discrets qui ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs (notes à un devoir...) et les caractères continus dont on regroupe les valeurs par intervalles (taille, durée d'écoute...)

2)Séries statistiques associées à un caractère discret : On appelle série statistique la donnée simultanée (dans un tableau) des valeurs du caractère étudié (noté x_i), rangées dans l'ordre croissant, et des effectifs (notés ni) de ces valeurs.et a la place des effectifs (n_i), on peut aussi utiliser les fréquences :
$f_i = \frac{n_i}{N}$ où N représente l'effectif total) ou les fréquences en pourcentages : $P_i = \frac{n_i}{N} \times 100$

L'effectif cumulé croissant d'une valeur x est la somme des effectifs des valeurs y tels que $x \leq y$. L'effectif cumulé décroissant d'une valeur x est la somme des effectifs des valeurs y tels que $y \geq x$

Exemple1 : Les notes sur 20 obtenues lors d'un devoir de mathématiques dans une classe de seconde sont les suivantes :
10, 8, 11, 9, 12, 10, 8, 10, 7, 9, 10, 11, 12, 10, 8, 9, 10, 9, 10, 11. La population étudiée est la classe et les individus sont les élèves.

L'effectif total est égal à 20 et la note obtenue au devoir est le caractère discret que l'on étudie.

La série statistique définie par les effectifs est la suiv ante :

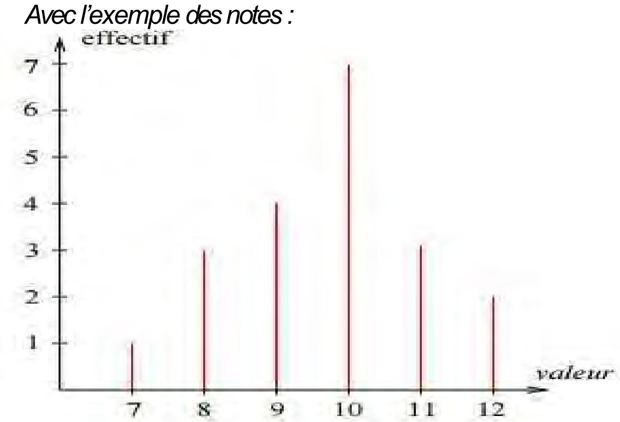
Valeurs *xi*	7	8	9	10	11	12
Effectif	1	3	4	7	3	2
Effectif cumulé croissant	1	4	8	15	18	20
Effectif cumulé décroissan	19	10	12	5	2	0

La série statistique dénie par les fréquences en pourcentage est la suivante :

Valeurs du caractère (notes	7	8	9	10	11	12
Fréquences	5 %	15 %	20 %	35 %	15 %	10 %

3) Représentation graphique : Pour les caractères quantitatifs discrets, on utilise le diagramme en bâton : dans un repère orthogonal, pour chaque valeur de la série statistique on trace un trait vertical dont la hauteur est proportionnelle

Avec l'exemple des notes :



4) Les Paramètres de position d'une série statistique (le mode ; la Moyenne ; la Médiane)

a) Le mode: c'est la valeur du caractère correspondant au plus fort effectif Dans l'exemple1 c'est : la note : 10

b) La médiane : on appelle médiane d'une série statistique discrète toute valeur M du caractère telle qu'au moins 50% Des individus aient une valeur du caractère inférieure ou égale à M et au moins 50% des individus aient une valeur du caractère supérieure ou égale à M.

Recherche pratique de la médiane :

On range les valeurs du caractère une par une dans l'ordre croissant (chaque valeur du caractère doit apparaître un nombre de fois égal à l'effectif correspondant).

Si l'effectif total est impair, la médiane M est la valeur du caractère située au milieu.

Si l'effectif total est pair, la médiane M est la demi-somme des 2 valeurs situées au milieu.

Dans l'exemple1 : **methode1 :** On écrit les valeurs de la série dans l'ordre croissant :

7 8 8 8 9 9 9 9 10 10 **10** 10 10 10 10 11 11 11 12 12

L'effectif total est pair : la médiane M est la demi-somme des 2 valeurs situées au milieu d'où la médiane Est égale à 10

Methode2 :le demie L'effectif total est : $\frac{20}{2}=10$

Le plus petit effectif cumulé supérieur à 10 est 15

La note associée est 10 donc la médiane est 10

c) La moyenne :

Modalités (x_i)	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_p
Nombre de chaises (Effectifs) (n_i)	n_1	n_2	n_3	$\cdots$	n_p

La moyenne est : $m=\frac{x_1\times n_1+x_2\times n_2+x_3\times n_3+\ldots+x_p\times n_p}{n_1+n_2+n_3+\ldots n_p}=\frac{\sum_{i=1}^{i=p}x_i\times n_i}{\sum_{i=1}^{i=p}n_i}=\frac{\sum_{i=1}^{i=p}x_i\times n_i}{N}$

Dans l'exemple1 : La moyenne est égale à : $m=\frac{7\times1+8\times3+9\times4+10\times7+11\times3+12\times2}{N}=\frac{194}{20}=9.7$

5) Les paramètres de dispersions :(L'écart-moyen ; la Variance ; L'écart-type)

a)L'écart-moyen

$$e=\frac{n_1\times|x_1-m|+n_2\times|x_2-m|+n_3\times|x_3-m|+\ldots+n_p\times|x_p-m|}{n_1+n_2+n_3+\ldots n_p}=\frac{\sum_{i=1}^{i=p}n_i\times|x_i-m|}{\sum_{i=1}^{i=p}n_i}$$

b) la Variance

$$V=\frac{n_1\times|x_1-m|^2+n_2\times|x_2-m|^2+n_3\times|x_3-m|^2+\ldots+n_p\times|x_p-m|^2}{n_1+n_2+n_3+\ldots n_p}=\frac{\sum_{i=1}^{i=p}n_i\times|x_i-m|^2}{\sum_{i=1}^{i=p}n_i}$$

c) L'écart-type : $\sigma=\sqrt{V}$

Exemple2 : on considère la série statistique suivante :

caractères	**7**	**2**	**1**
Effectifs	**1**	**4**	**5**

Calculer les Paramètres de dispersions de cette série statistique (L'écart-moyen ; la Variance ; L'écart-type)

Solution : On calcul d'abord la moyenne : $m = \frac{5\times1+4\times2+1\times7}{10} = \frac{20}{10} = 2$

L'écart-moyen : $e = \frac{5\times|1-2|+4|2-2|+1\times|7-2|}{10} = \frac{5\times|-1|+4|0|+1\times|5|}{10}$

$e = \frac{5\times1+4\times0+1\times5}{10} = \frac{10}{10} = 1$

La Variance : $V = \frac{5\times|1-2|^2+4|2-2|^2+1\times|7-2|^2}{10} = \frac{5\times|-1|^2+4|0|^2+1\times|5|^2}{10} = 3$

L'écart-type : $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{3}$

6) Séries statistiques associées à un caractère continu

6-1 Classement des données

La seule différence par rapport aux caractères discrets, c'est que les valeurs du caractère sont regroupées dans des intervalles (Appelés classes du caractère).

Exemple3 : Temps passé devant la télévision par 34 élèves pendant une certaine journée.

temps en minutes	[0, 15[	[15, 30[	[30, 60[	[60, 120[	[120, 180[
Nombre d'élèves	7	5	8	10	4

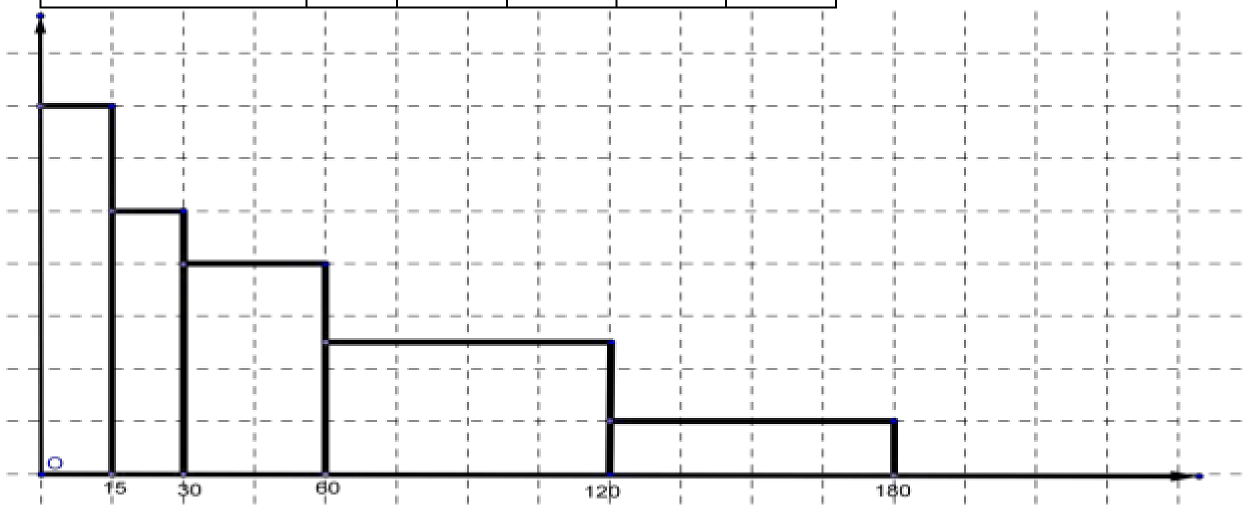
6-2 Représentation graphique :

Pour la représentation graphique d'un caractère continu, on utilise généralement un histogramme : dans un repère orthogonal on porte en abscisse les valeurs des bornes des intervalles (selon l'unité choisie), puis pour chaque intervalle on trace un rectangle dont l'aire est proportionnelle à l'effectif (selon l'unité choisie).

Remarque : En pratique, il est conseillé de commencer par construire un tableau donnant la largeur et l'aire de chaque rectangle (selon les unités choisies). On peut alors facilement en déduire la hauteur de chaque rectangle ce qui facilite la construction graphique de l'histogramme.

Pour l'exemple3 : proposé ci-dessus : (Unités : en abscisse 1 cm représente 15 min et 1 cm^2 représente 1 élève)

temps en minutes	[0, 15[	[15, 30[	[30, 60[	[60, 120[	[120, 180
Aire du rectangle en Cm^2	7	5	8	10	4
largeur du rectangle en Cm	1	1	2	4	4
hauteur du rectangle en = aire / l argeur	7	5	4	2 ,5	1



6-3 Calcul des paramètres de position et de dispersion :

Pour calculer les différents paramètres d'une série statistique associé à un caractère continu, on prend comme valeur du caractère le milieu de chaque classe.

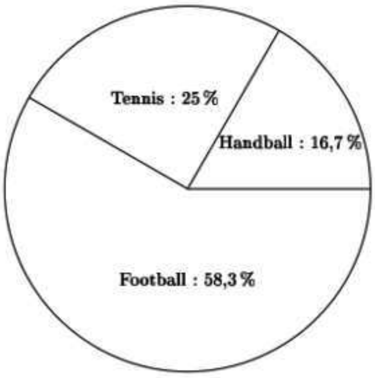
Pour l'exemple3, la série devient :

Valeur(milieu de chaque intervalle) x_i	7,5	22,5	45	90	150
Effectif n_i	7	5	8	10	4

La moyenne est égale à : $m = \dfrac{7\times 7.5+5\times 22.5+8\times 45+10\times 90+4\times 150}{34}$ 60

7) Autre Représentation graphique : diagramme circulaire

Exemple4 : voici un diagramme circulaire représentant la répartition des adhérents à un club sportif.



Sachant que le club compte 240 adhérents, combien d'adhérents jouent ...

- Au football ?
- Au tennis ?
- Au handball ?

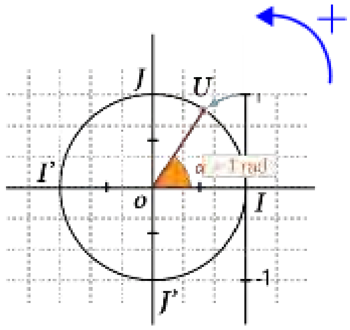
<u>Solution</u> : On multiplie l'effectif total (240) par la fréquence de chaque caractère indiquée dans le camembert pour obtenir l'effectif du caractère. Ainsi :

- Football : 240 × 0,583 = 140
- Tennis : 240 × 0,25 = 60
- Handball : 240 × 0,167 = 40

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

TRIGONOMÉTRIE1
Résumé de Cours

I) Le radian et le cercle trigonométrique :



1) Soit un cercle C de centre O et de rayon 1.
On appelle radian, noté *rad*, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.

2) On appelle cercle trigonométrique tout cercle de centre O et de rayon 1 muni d'un point d'origine I et d'un sens de parcours appelé direct (sens contraire au sens des aiguilles d'une montre)

3) Les mesures en radian et en degré d'un même angle sont proportionnelles

- Si x est la mesure d'un angle en radian et y sa mesure en degré alors : $\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180}$

4) Correspondance degrés et radians

Ainsi, à 2π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 360°.
Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Mesure en radians x rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Mesure en degrés y°	0	30°	45°	60°	90°	180°	360°

II) Les abscisse curviligne d'un point sur le cercle trigonométrique

1) Soit M un point du cercle trigonométrique d'origine I
Et soit α la longueur de l'arc IM (on allant de I vers M dans le sens direct) en radian
Tout réel qui s'écrit sous la forme : $\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ s'appelle abscisse curviligne de M

2) Si x et x' deux abscisses curvilignes du même point M dans le cercle trigonométrique alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x - x' = 2k\pi$ on écrit : $x \equiv x'[2\pi]$:Et on lit : x est congrue a x' modulo 2π

3) Abscisse curviligne principale :
Parmi les abscisses curvilignes d'un point M du cercle trigonométrique une seule se situe dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ et on l'appelle abscisse curviligne principale .

III)) Relation de Chasles pour les angles orientés de deux demi-droites et de vecteurs

1) Soit $[Ox)$ et $[Oy)$ et $[Oz)$ trois demi-droites d'origine O

On a : $\overline{(Ox;Oy)} + \overline{(Oy;Oz)} \equiv \overline{(Ox;Oz)}[2\pi]$

$\overline{(Ox;Oy)} \equiv -\overline{(Oy;Ox)}[2\pi]$

2) l'angle orienté des vecteurs non nuls $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans cet ordre est l'angle noté : $(\vec{U}\,;\vec{V})$

3) Pour des vecteurs non nuls, on a :

a) $\overline{(\vec{u}\,;\vec{u})} \equiv 0[2\pi]$ b) $\overline{(\vec{u}\,;-\vec{u})} \equiv \pi[2\pi]$

c) $\overline{(\vec{u}\,;\vec{v})} + \overline{(\vec{v}\,;\vec{w})} \equiv \overline{(\vec{u}\,;\vec{w})}[2\pi]$ relation de Chasles

Et on a : $\overline{(\vec{u}\,;\vec{v})} = -\overline{(\vec{v}\,;\vec{u})} + 2k\pi$ et $\overline{(-\vec{u}\,;\vec{v})} = \overline{(\vec{u}\,;\vec{v})} + \pi + 2k\pi$ et $\overline{(-\vec{u}\,;-\vec{v})} = \overline{(\vec{u}\,;\vec{v})} + 2k\pi$

et $\overline{(\vec{u}\,;-\vec{v})} = \overline{(\vec{u}\,;\vec{v})} + \pi + 2k\pi$

IV) Les rapports trigonométriques d'un nombre réel.

1) Soit (C) un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I

Soit $x \in \mathbb{R}$ il existe un point M de (C) unique tel que x est une abscisse curviligne de M

Soit C le projeté orthogonal de M sur (OI)

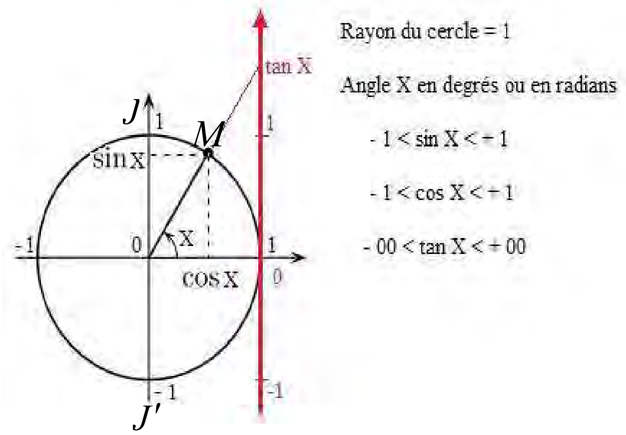
Et soit S le projeté orthogonal de M sur (OJ)

- Le <u>cosinus du nombre réel</u> x est l'abscisse de M

Et on note **cos** x.

- Le <u>sinus du nombre réel</u> x est l'ordonnée de M

Et on note **sin** x.



- Soit (Δ) la droite tangente a (C) en I

Si $M \neq J$ et $M \neq J'$ alors la droite (OM) coupe la tangente (Δ) en un point T

Le nombre réel $\overline{IT}$ l'abscisse de T sur l'axe (Δ) est La tangente du nombre réel x et on note **tan** x.

Remarque :

✓ Les rapports trigonométriques : **cos** x *et* **sin** x *et* **tan** x. sont aussi appelés cosinus et sinus et tangente de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$

✓ tan x existe si et seulement si : $x \neq -\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

✓ La cotangente de $\boldsymbol{x}$ est le nombre réel x noté cotant x et on a : $\text{cotan}\, x = \dfrac{1}{\tan x}$

2) Cosinus, sinus et tangente d'angles remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	**-1**
$\sin x$	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	**0**

3) Propriétés : Pour tout nombre réel x, on a :

1) $-1 \leq \cos x \leq 1$ 2) $-1 \leq \sin x \leq 1$ 3) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 4) $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ où $k \in \mathbb{Z}$

5) $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif 6) si $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

7) si $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors : $\tan(x + k\pi) = \tan x$

8) : $1 + (\tan x)^2 = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$ si $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

9) $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$ 10) $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$

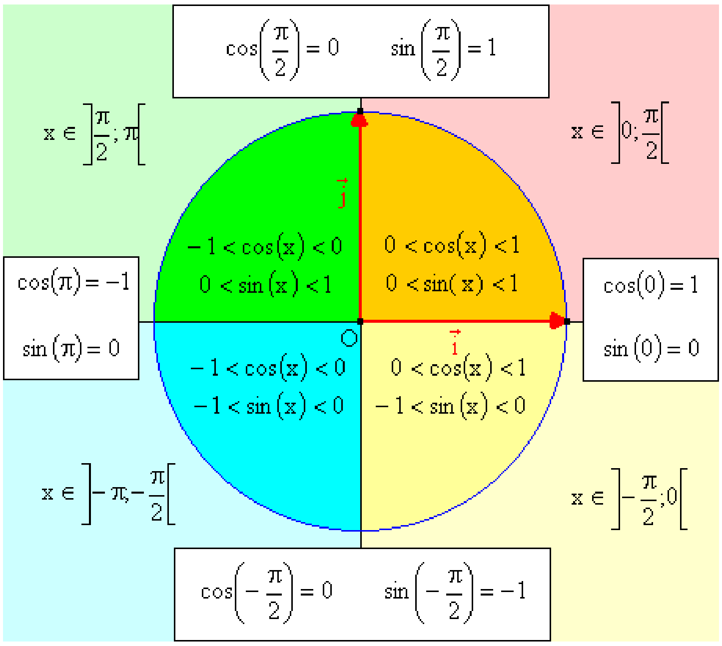
11) $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$ 12) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

13) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ 14) $\tan(\pi - x) = -\tan x$ et $\tan(\pi + x) = \tan x$ si $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

15) $\tan(\pi - x) = -\tan x$ et $\tan(\pi + x) = \tan x$ si $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

V) Signe de Cosinus, sinus

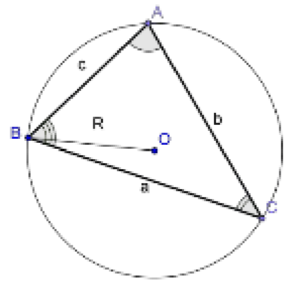
- $Si\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ alors $\cos x \ge 0$
- $Si\ \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ alors $\cos x \le 0$
- $Si\ 0 \le x \le \pi$ alors $\sin x \ge 0$
- $Si\ \pi \le x \le 2\pi$ alors $\sin x \le 0$



Loi des sinus : ABC triangle tel que : $AB = c$ **et** $AC = b$ **et** $BC = a$
S est l'aire du triangle ABC, R est le rayon du cercle circonscrit à ABC

On a la Loi des sinus : $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{2S_{ABC}}{abc} = \frac{1}{2R}$ d'où $abc = 4RS_{ABC}$

La formule de l'aire : $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$



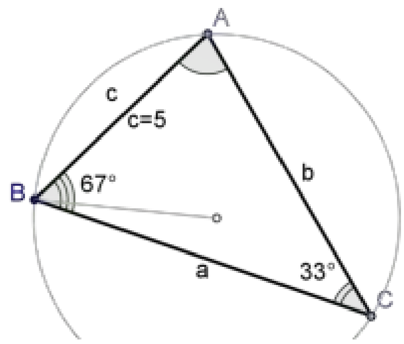
Remarque : la Loi des sinus : peut être utilisée :
- Soit pour calculer la longueur d'un côté, lorsque le triangle est donné par 2 angles et un côté ;
- Soit pour calculer un angle si le triangle est donné par 2 longueurs et un angle opposé à l'un des côtés précédents.

Exemple : Calcul de la longueur d'un côté
Soit à calculer AC dans ce triangle :

D'après la loi des sinus, On obtient : $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ donc : $\frac{\sin 67^\circ}{b} = \frac{\sin 33^\circ}{5}$

Donc : $b\sin 33^\circ = 5\sin 67^\circ$ c'est-à-dire : $b = \frac{5\sin 67^\circ}{\sin 33^\circ}$

Par suite : $AC \simeq 8,45$



TRIGONOMÉTRIE2

Partie 2 : Equations et inéquations trigonométriques

Résumé de Cours

I) Les équations trigonométriques élémentaires

1) Equation: $\cos x = a$ Soit a un nombre réel.

Si $a > 1$ ou $a < -1$ alors l'équation $\cos x = a$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on a : $S = \varnothing$.

Si $-1 \leq a \leq 1$ alors il existe un unique réel : α dans $]0\,;\pi]$ tel que $\cos x = \cos\alpha$ et alors on a :

$S = \{\alpha + 2k\pi ; -\alpha + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$.

2) Equation: $\sin x = a$

Si $a > 1$ ou $a < -1$ alors l'équation $\sin x = a$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on a : $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$.

Si $-1 \leq a \leq 1$ alors il existe un unique réel : α dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin x = \sin\alpha$ et alors on a :

$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi ; \pi - \alpha + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$.

3) Equation : $\tan x = a$

L'équation $\tan x = a$ est définie dans $\mathbb{R}$ équivaut à : $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ avec k un nombre relatif

Il existe un unique réel : α dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan x = \tan\alpha$ et alors on a : $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + k\pi \,/\, k \in$ [redacted]

Des équations trigonométriques élémentaires :

$\cos x = 1$ Équivaut à : $x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = 0$ Équivaut à : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = -1$ Équivaut à : $x = (2k+1)\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = 1$ Équivaut à : $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = 0$ Équivaut à : $x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

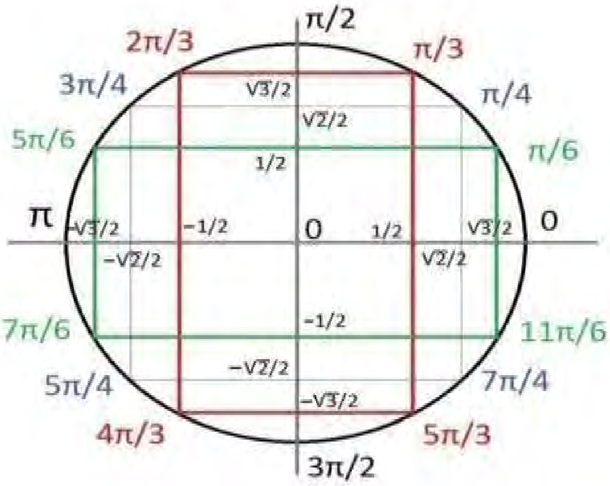
$\sin x = -1$ Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

II) Les inéquations trigonométriques élémentaires - Méthode :

Comme pour les équations, on cherche à se ramener à une inéquation du type $\sin(\alpha) \leqslant \sin(\beta)$ ou $\cos(\alpha) \leqslant \cos(\beta)$ ou $\tan(\alpha) \leqslant \tan(\beta)$, en remplaçant au besoin $\leqslant$ par $\geqslant$, < ou >.

Le cercle trigonométrique permet de mieux visualiser les intervalles solutions.

Remarque : Pour les inéquations trigonométriques il est pratiquement impossible de résoudre sans dessiner un cercle trigonométrique



Les Transformations du plan

Résumé de Cours

I) symétrie axiale et symétrie centrale et translation et l'homothétie

1) (Δ) est une droite du plan.

La symétrie axiale d'axe (Δ) est la transformation qui transforme tout point M du plan au point unique M' tel que : (Δ) est la médiatrice du segment [MM'] La symétrie axiale d'axe (Δ) est notée : $S_{(\Delta)}$

D'où : $S_{(\Delta)}(M) = M'$ si et seulement si : (Δ) est la médiatrice du segment [MM']

$S_{(\Delta)}(N) = N'$ $S_{(\Delta)}(M) = M'$

2) Ω est un point du plan. La symétrie centrale de centre Ω est la transformation qui transforme tout point M du plan au point unique M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$

La symétrie centrale de centre Ω est notée : S_Ω

D'où : $S_\Omega(M) = M'$ si et seulement si : $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$.

3) $\vec{u}$ est un vecteur du plan . La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation qui transforme tout point M du plan au point unique M' tel que: $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$ La translation de vecteur $\vec{u}$ est notée : $t_{\vec{u}}$

D'où : $t_{\vec{u}}(M) = M'$ si et seulement si : $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$.

4) Ω est un point du plan et k un nombre réel. L'homothétie de centre Ω et de rapport k est la transformation qui transforme tout point M du plan au point unique M' tel que : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$

L'homothétie de centre Ω et de rapport k est notée : $h_{(\Omega,k)}$

D'où : $h(M) = M'$ si et seulement si : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$.

II. Propriétés caractéristiques

Remarque : une transformation pour cette leçon et soit une symétrie axiale ou symétrie centrale ou translation ou l'homothétie

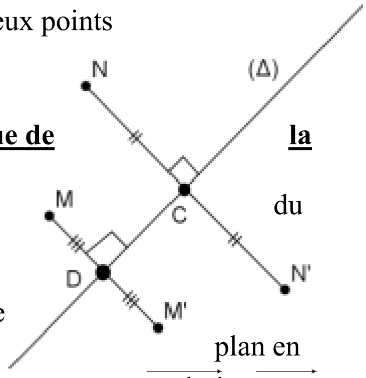
1° Propriété caractéristique de l'homothétie : Soit $k \in \mathbb{R}^*$

T est une homothétie si et seulement si : T transforme deux points M et N du plan en deux points M' et N' tel que $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$.

2° Propriété caractéristique de la symétrie centrale

Soit T une transformation du plan P ; T est une symétrie centrale si et seulement si : T transforme deux points M et N du plan en deux points M' et N' tel que :

$\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$



3° Propriété caractéristique de la translation

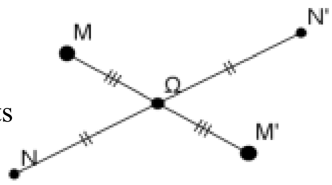
Soit T une transformation du plan P

T Est une translation si et seulement si : T transforme deux points M et N du plan en deux points M'et N' tel que : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

III. Propriété des transformations

1) a)Un point A est invariant si son image A' est lui-même ; c'est-à-dire A' = A.

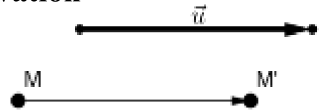
b) Dans une symétrie de centre I, seul le centre de symétrie, I est un point invariant



c) Dans une symétrie axial d'axe Δ , les points invariants sont les points de la droite (Δ).

d) Dans une translation de vecteur $\vec{u} \neq 0$, il n'y a aucun point invariant.

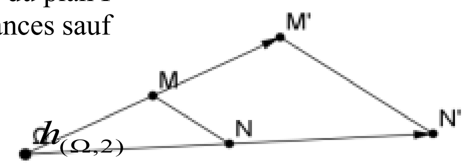
2) Propriétés de conservation



Les transformations conservent :

L'alignement des points et le coefficient d'alignement et le Milieu.

Les transformations du plan P conservent les distances sauf l'homothétie (L'homothétie ne conserve pas les distances)



Les transformations du plan P conservent les mesures des angles.

Les transformations du plan P conservent le parallélisme et l'orthogonalité.

IV) images des figures par les transformations

L'image d'une droite par une translation ou par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.

L'image d'une demi-droite par une transformation est une demi-droite

L'image d'un segment par une transformation est un segment de même longueur sauf pour l'homothétie

L'image d'un cercle par une translation est un cercle de même rayon sauf pour l'homothétie

L'image d'un cercle de rayon r par une homothétie $h_{(\Omega,k)}$ est un cercle de rayon $r' = |k|r$

Frises et transformations

Résumé de Cours : **Fonctions** - *Généralités*

1) Définitions et Domaine de définitions

Une fonction : est une relation qui a un nombre x appartenant à un ensemble D associe un nombre y :

On note : $x \overset{f}{\mapsto} y$ ou encore $f : x \mapsto y$ ou encore $y = f(x)$

On dit que y est l'image de x par la fonction f et que x est un antécédent de y par la fonction f

Domaine de définition : Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f que l'on notera D_f

Egalité de deux fonctions : Soient f et g deux fonctions, D_f et D_g leurs domaines de définitions respectifs.

On dit que f et g sont égaux et on écrit f=g si et seulement si : $D_f = D_g$ et pour tout : $x \in D_f$ (ou $x \in D_g$)

On a : f(x)=g(x)

Représentations graphiques : Soit f une fonction, D_f son domaine de définition

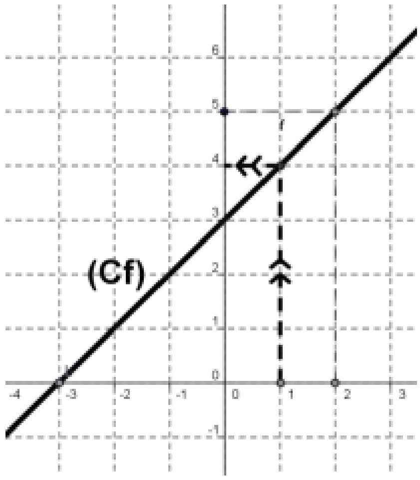
a) L'ensemble des points M (x, f (x)) forment la courbe représentative de la fonction f, souvent notée C_f .

$C_f = \{M(x, f(x)) / x \in D_f\}$.

b) Utilisation d'une courbe pour obtenir une image

Pour obtenir l'**image d'un nombre** a par une fonction f, on lit graphiquement l'ordonnée du point de la courbe de f ayant pour abscisse a.

Exemple : Voici la représentation graphique d'une fonction f :



Pour déterminer l'image de 1 par f, on doit partir de l'abscisse 1, puis on lit l'ordonnée du point de la courbe correspondant :

Par lecture, on obtient 4. Donc : l'image de 1 par f est 4.

Pour déterminer l'image de 2 par f, on doit partir de l'abscisse 2, puis on lit l'ordonnée du point de la courbe correspondant.

Par lecture, on obtient 5 : l'image de 2 par f est 5.

2) Fonctions paires et Fonctions impaires

a) Fonction paire : On dit qu'une fonction f est paire si et seulement si :

- Pour tout x de D_f si $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$
- Pour tout réel x de D_f On a**: f(-x) = f(x)**.

b) Fonction impaire :

On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :

- Pour tout x de D_f si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$
- Pour tout réel x de D_f, on a : **f(-x) = -f(x)**

c) Le graphe et la parité de la fonction.

- La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées.
- La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

3) Les variations d'une fonction numérique.

a)Définitions :

a) Soit f une fonction et D_f son domaine de définition et soit I un intervalle inclus dans D_f

- Dire f que est strictement croissante sur I (croissante sur I) signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tel que : $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1) \prec f(x_2)$ $\left(f(x_1) \leq f(x_2)\right)$

Rq : Une fonction croissante « conserve l'ordre ».

- Dire f que est strictement décroissante sur I

(décroissante sur I) signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ $\left(f(x_1) \geq f(x_2)\right)$

Rq : Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».

- Dire f que est constante sur I signifie que : si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tel que : $x_1 \prec x_2$ alors : $f(x_1) = f(x_2)$

- Une fonction définie sur un intervalle I est monotone sur cet intervalle si elle est : soit croissante sur I soit décroissante sur I

- On dit que f est constante sur I si et seulement si : il existe un réel k tel que : $f\left(x\right)=k$ pour tout $x\in I$

b) Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

• On dit que f est strictement croissante (croissante) sur I si et seulement si pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ On a $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \succ 0$ $\left(\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \geq 0\right)$

• On dit que f est strictement décroissante (décroissante) sur I si et seulement si pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ On a $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \prec 0$ $\left(\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq 0\right)$

• On dit que f est constante sur I si et seulement si pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=0$.

c) les variations et la parité : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ et soit I' le symétrique de l'intervalle I

❖ Si f est paire alors :

• f Est croissante sur I si et seulement si f est décroissante sur I'.

• f Est décroissante sur I si et seulement si f est croissante sur I'.

❖ Si f est impaire alors :

• f est croissante sur I si et seulement si f est croissante sur I'

• f est décroissante sur I si et seulement si f est décroissante sur I'

Si f est paire ou impaire alors il suffit d'étudier ses variations sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et en déduire ses variations sur D_f

4) Les extremums d'une fonction numérique.

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

➢ Dire que $f\left(a\right)$ est une valeur maximale de f sur I (ou $f\left(a\right)$ est un maximum de f sur I) si et seulement si pour tout que $x \in I : f\left(x\right) \leq f\left(a\right)$

➢ Dire que $f\left(a\right)$ est une valeur minimale de f sur I (ou $f\left(a\right)$ est un minimum de f sur I) si et seulement si pour tout $x \in I : f\left(x\right) \geq f\left(a\right)$

5) Etude et représentation graphique des fonctions : $x \xrightarrow{f} ax^2$

Soit f une fonction numérique tel que : $f\left(x\right)=ax^2$; $a \in \mathbb{R}^*$ on a : $D_f=\mathbb{R}$

f est une fonction paire .

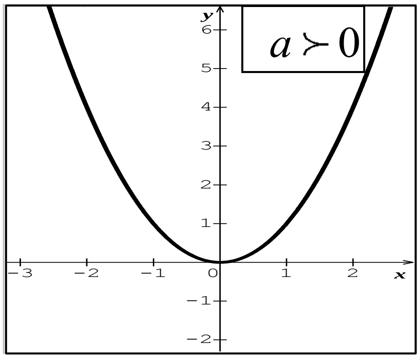
Tableau de variations de f si $a \succ 0$

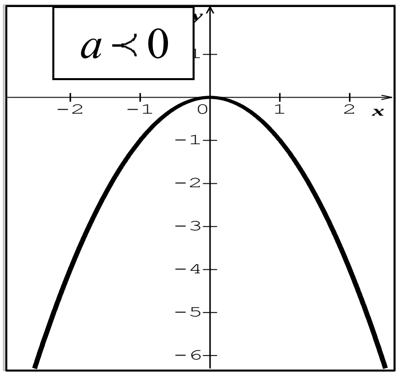
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Tableau de variations de f si $a \prec 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

Dans un Repère orthonormé $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe représentative de la fonction $x \xrightarrow{f} ax^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ s'appelle une parabole dont les éléments caractéristiques sont son sommet qui est l'origine du repère et son axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées





6) Etude et représentation graphique des fonctions : $x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

a) On a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

b) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Avec $\Delta = b^2 - 4ac$ et $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$ et s'appelle la forme canonique de $f(x)$

Dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x = \alpha$

3° Les variations de f

Si $a \succ 0$

x	$-\infty$ α $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ β $\nearrow$

Si $a \prec 0$

x	$-\infty$ α $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$ β $\searrow$

7) Etude et représentation graphique des fonctions : $x \xrightarrow{f} \frac{a}{x}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$

a) Tableau de variations de f

si $a \succ 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$

si $a \prec 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

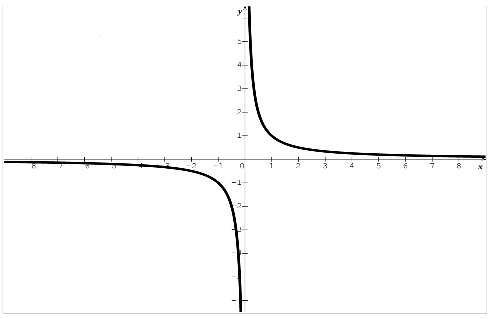
b) la courbe représentative de la fonction f s'appelle une hyperbole

c)Les éléments caractéristiques sont :

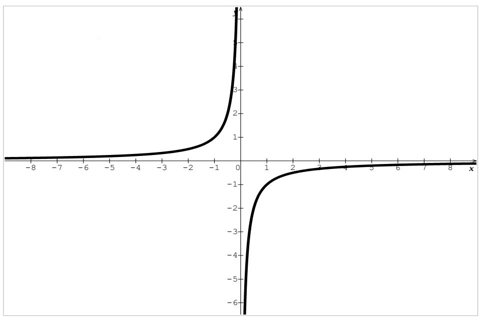
-Son centre de symétrie est l'origine du repère

- Ces deux asymptotes sont l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées

si $a \succ 0$



si $a \prec 0$



8) Etude et représentation graphique des fonctions homographiques :

$x \xrightarrow{f} \frac{ax+b}{cx+d}$ $a \neq 0$ et $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$

f est une fonction homographique

- Pour $x \in \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ on a $f(x) = \beta + \dfrac{\gamma}{x-\alpha}$ dite forme réduite de $f(x)$
- Soit $W(\alpha;\beta)$ donc dans le repère $(W;\vec{i};\vec{j})$ l'équation de (C_f) est $Y = \dfrac{\gamma}{X}$ avec $Y = y - \beta$ et $X = x - \alpha$
- (C_f) est une hyperbole de centre W et d'asymptotes l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées
- Dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (C_f) est l'hyperbole de centre W et d'asymptotes les droites d'équations

respective**s** $x = \alpha$ **et** $y = \beta$

1iér cas : Si $\det f = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \succ 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$ $\quad \frac{-d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

2iér cas : Si $\det f = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ [redacted]

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$ $\quad \frac{-d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$

9) Position relative de courbes, interprétation graphique d'équations et d'inéquations

Le but de ce chapitre est de pouvoir déterminer par le calcul, entre 2 courbes, quelle courbe se situe au-dessus de l'autre et sur quel(s) intervalle (s).

a)Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Soient (C_f) la courbe représentative de f et (C_g) la courbe représentative de g .

- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points D'intersection de (C_f) et de (C_g)
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au-dessus de (C_g)
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au- dessous de (C_g)

b) Position relative de deux courbes et intersection

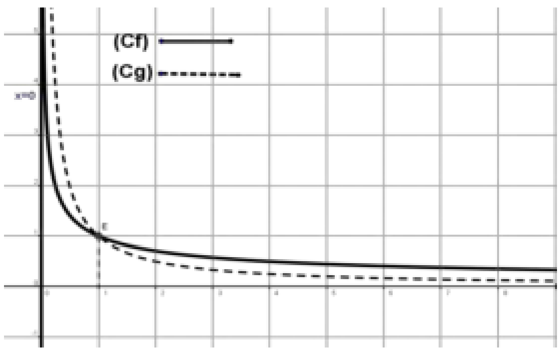
Pour étudier la position relative de deux courbes (C_f) et (C_g) on étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$

- Dans le cas où $f(x) - g(x) \succ 0$ on en déduit que $f(x) \succ g(x)$ et par conséquent (C_f) est au-dessus de (C_g)

- Dans le cas où $f(x) - g(x) \prec 0$ on en déduit que $f(x) \prec g(x)$ et par conséquent (C_f) est au-dessous de (C_g)

- Dans le cas où $f(x) - g(x) = 0$ on en déduit qu'il y a intersection

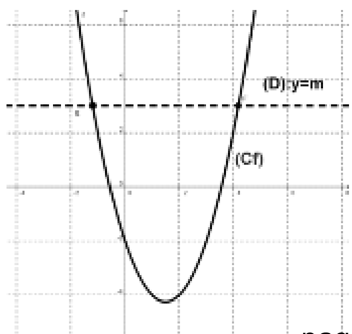
Exemple1: On a représenté ci-dessous (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur]0;+∞[par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.



Graphiquement : on constate que (C_f) est au-dessus de (C_g) sur]0;1[et que (C_f) est en-dessous de (C_g) sur]1;+∞ [

c) Equation : $f(x) = m$ **et inéquation** $f(x) \geq m$

- Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y = m$
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq m$ sont les abscisses des points de (C_f) situés au-dessus de la droite d'équation $y = m$.



Résumé de Cours
Géométrie dans l'espace

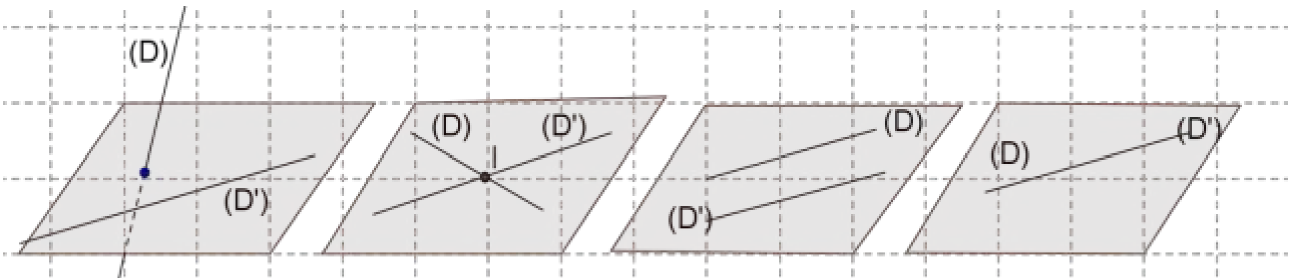
A) Axiomes sur lesquels reposent les raisonnements de géométrie dans l'espace

1. Par 2 points distincts de l'espace, il passe une et une seule droite.
2. Par 3 points non alignés de l'espace, il passe un et un seul plan.
3. Si un plan contient deux points A et B, alors ce plan contient tous les points de la droite (AB)
4. Si deux plans distincts ont un point en commun alors leur intersection est une droite passant par ce point.
5. Axiome d'Euclide : par un point A donné et une droite (D) donnée, il ne passe qu'une et une seule droite parallèle à (D).

B) Positions relatives de deux droites

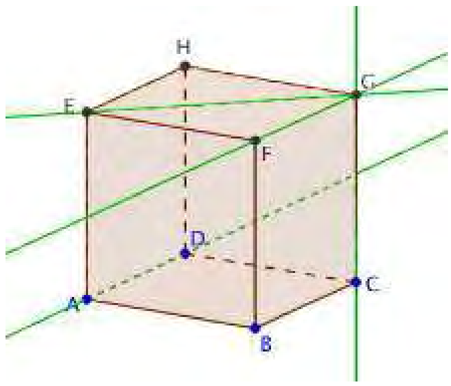
Deux droites (D) et (D') de l'espace sont soit coplanaires (dans un même plan) soit non coplanaires.
Dans le cas où (D) et (D'sont coplanaires alors : on a 3 cas possibles

- Ils se coupent en un point I : $(D)\cap(D')=\{I\}$ (sont sécantes)
- Pas de points communs : $(D)\cap(D')=\varnothing$ sont parallèles : $(D)\parallel(D')$
- Sont confondues $(D)=(D')$



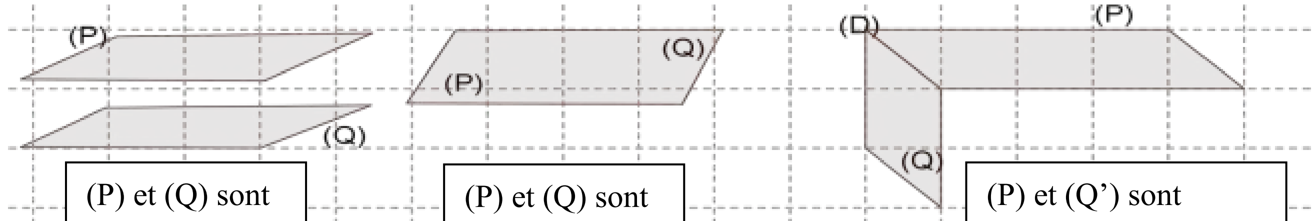
(D) et (D') non Coplanaires.	(D) et (D') sont sécantes	(D) et (D') sont parallèles	(D) et (D') sont confondues

Exemples : ABCDEFGH est un cube.
- Les droites (EG) et (FG) appartiennent au même plan (EFG) et sont sécantes en G.
- Les droites (AD) et (FG) appartiennent au même plan (ADG) et sont parallèles.
- Les droites (AD) et (CG) sont non coplanaires.



3) Positions relatives de deux plans

Deux plans (P) et (Q) de l'espace sont soit sécants suivant une droite soit parallèles (confondues)



(P) et (Q) sont parallèles

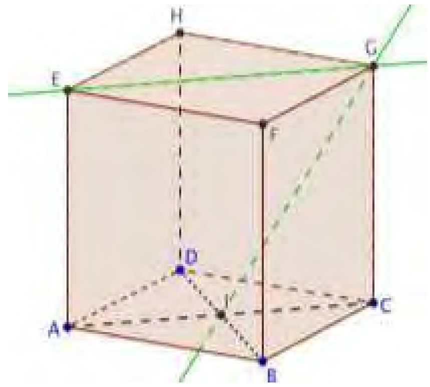
(P) et (Q) sont confondues

(P) et (Q') sont sécantes suivant (D)

Exemple ☝figure1

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

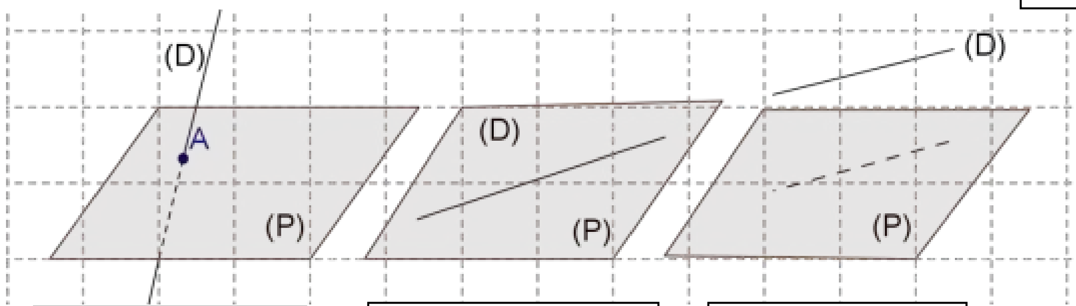
- Les plans (BCG) et (BCE) sont sécants suivant la droite (BC).
- Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles



C) Positions relatives d'une droite et d'un plan

Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

☝figure1



(D) et (P) sont sécants en A.

(D) est incluse dans (P)

(D) et (P) sont parallèles

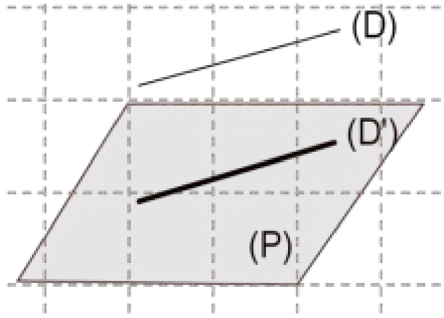
Exemple : ☝figure1 : ABCDEFGH est un cube.

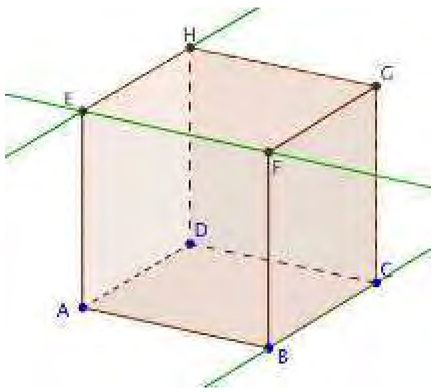
- La droite (GI) et le plan (ABC) sont sécants en I.
- La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG).
- La droite (EG) et le plan (ABC) sont parallèles.

D) Propriétés :

• Comment montrer qu'une droite est parallèle à un plan *P ?*

Une droite (D) est parallèle à un plan (P) s'il existe une droite (D') dans (P) parallèle à (D)





• Parallélisme de deux plans
Si un plan (P) contient deux droites sécantes (D) et (D') parallèles à un plan (P') alors les plans (P) et (P') sont parallèles.

• Parallélisme de deux droites
Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et leurs intersections sont deux droites parallèles.

Théorème du toit : (P_1) et (P_2) sont deux plans sécants.

Si une droite (D_1) de (P_1) est parallèle à une droite (D_2) de (P_2) alors la droite d'intersection (Δ) de (P_1) et (P_2) est parallèle à (D_1) et (D_2)

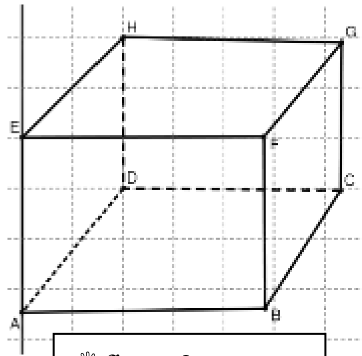
E) Orthogonalité

1) Orthogonalité de deux droites

Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires.

Exemple : ABCDEFGH est un cube. ☝figure2
- Les droites (EH) et (EF) sont perpendiculaires.
- Les droites (BC) et (EF) sont orthogonales.

Remarque :
- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque n'est pas vraie car deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et sécantes.



☝figure2

2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

• Une droite (D) est orthogonale à un plan (P) si elle est orthogonale à deux droites sécantes de (P).
• Si une droite (D) est orthogonale à un plan (P) alors elle est orthogonale à toutes les droites de (P).

Exemple : ABCDEFGH est un cube. ☝figure2
(AE) est perpendiculaire aux droites (AD) et (AB).
(AB) et (AD) sont sécantes et définissent le plan (ABC).
Donc (AE) est orthogonal au plan (ABC).

3) Orthogonalité de deux plans

Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale de l'autre.