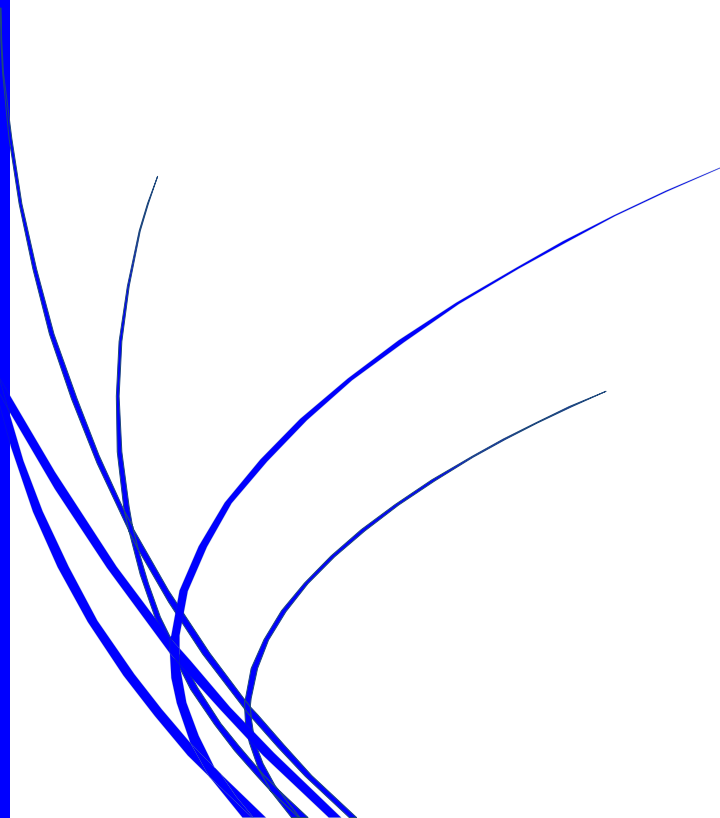


Niveau : Deuxième bac
sciences PC /SVT /STE

Résumé de cours

Continuité d'une fonction



1) Continuité d'une fonction en un point

Continuité d'une fonction en un point d'abscisse x_0

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$

La fonction f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Continuité d'une fonction à droite et à gauche d'un point a

➤ La fonction f est continue à droite de $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

➤ La fonction f est continue à gauche de $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

la fonction f est continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche du point a

2) Continuité d'une fonction sur un intervalle

f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$

➤ La fonction f est continue sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ ssi f est continue en chaque point de l'intervalle $]a; b[$

➤ La fonction f est continue sur l'intervalle $[a; b]$ ssi f est continue sur l'intervalle $]a; b[$ et continue à droite de a et à gauche de b

Exemple des fonction usuelles continue sur un intervalle

1) Toute fonction **polynomiale** est continue sur $\mathbb{R}$

2) Les **fonctions rationnelles** sont continus en tout intervalles inclus dans leurs **domaines de définitions**

3) La fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$

4) Les fonctions $x \rightarrow \cos x$ et $x \rightarrow \sin x$ sont continus sur $\mathbb{R}$

5) La fonction $x \rightarrow \tan x$ est continue sur tout intervalle inclus dans l'ensemble $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

6) La fonction $x \rightarrow |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions continues

Somme -produit-quotient-composée

➤ La fonction $f = (u + v)$ est continue sur l'intervalle I ssi les fonctions u et v sont continue sur l'intervalle I

➤ La fonction $f = (\alpha \cdot u)$ est continue sur I ssi la fonction u est continue sur I

➤ La fonction $f = (u \cdot v)$ est continue sur I ssi u et v sont continue sur I

➤ La fonction $f = \left(\frac{u}{v}\right)$ est continue sur I ssi u est continue sur I et v continue sur I et $(\forall x \in I); v(x) \neq 0$

➤ La fonction $f = \sqrt{u}$ est continue sur I ssi la fonction u est continue sur I et $(\forall x \in I); u(x) \geq 0$

3) Image d'un intervalle -Théorème des valeurs intermédiaire

Image d'un intervalle par une fonctions continue

➤ L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

➤ Si f est continue sur un segment $[a, b]$ et M est le maximum de f sur $[a, b]$ et m est le minimum de f sur $[a, b]$. Alors $f([a, b]) = [m, M]$

:

Image d'un intervalle par fonction continue et str monotone

fest strictement croissante sur I	f strictement décroissante
$f([a; b]) = [f(a); f(b)]$	$f([a; b]) = [f(b); f(a)]$
$f([a; +\infty[) = [f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$f([a; +\infty[) =] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)]$
$f([a; b]) = [f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$f([a; b]) =] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$
$f(]a; b]) =] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$	$f(]a; b]) = [f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$f(]-\infty; b]) =] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(b)]$	$f(]-\infty; b]) = [f(b); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Si f une **fonction continue** sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, **il existe** un réel c dans $[a; b]$ tel que **$f(c) = k$**

En **d'autres termes** : l'équation $f(x) = k$ d'inconnue x admet au moins une solution dans $[a; b]$ pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$

Corollaire 01

Si f une **fonction continue** sur $[a; b]$ et **$f(a) \times f(b) < 0$** ; alors

l'équation **$f(x) = 0$** admet **au moins** une solution α dans $]a; b[$

➤ De plus si f est **strictement monotone** sur $[a; b]$ alors α est unique

Corollaire 02

Si la fonction f est **continue** et **strictement monotone** sur l'intervalle I et **$k \in f(I)$**

Alors l'équation **$f(x) = k$** admet **une unique solution α** dans I

4) Fonction Réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Si f une **fonction continue** et **strictement monotone** sur I ; Alors la fonction f admet **une fonction réciproque**, notée **f^{-1}** définit sur l'intervalle **$J = f(I)$**

Propriétés de fonction réciproque f^{-1}

Si f est continue et strictement monotone sur un I alors :

- $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$
- f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a même sens de variation que f
- Les courbes représentatives de f et de f^{-1} , sont **symétriques** par rapport la droite **d'équation $y=x$**
- $(\forall x \in I); f^{-1} \circ f(x) = x$; $(\forall x \in J); f \circ f^{-1}(x) = x$

5) Fonction racine n-ième

La fonction $x \rightarrow x^n$ est continue et strictement monotone sur $[0; +\infty[$ donc admet une fonction réciproque sur $[0; +\infty[$ Cette fonction est appelé la fonction racine n-ième, et elle est notée par : $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$

Propriété : Soient x et y dans $[0; +\infty[$ et m et n dans $\mathbb{N}^*$:

- | | |
|---|--|
| 1) $x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$ | 5) $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n \times m]{x^m}$ |
| 2) $\sqrt[n]{x} = \sqrt[m]{\sqrt[m]{x}}$ et $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ | 6) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \times n]{x}$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ | 7) $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$ |
| 4) $(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$ | 8) $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$ |

Puissances rationnelles d'un nombre réel str positif :

Soient a un réel strictement positif et $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$$