

:

:

Série d'exercices 1 : Limite et continuité

2 Bac SX

Exercice 01

Etudier la continuité des fonctions suivantes en x_0 :

$$1) \begin{cases} f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}; & x \neq 4 \\ f(4) = 4 \end{cases} \text{ en } x_0 = 4; \quad 2) \begin{cases} f(x) = \frac{2x+4}{6-3x}; & x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1}; & x > 1 \end{cases}, \text{ en } 1$$

$$3) \begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\sqrt{3}x)}{12x}; & x > 0 \\ f(x) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2+\cos x}}{x^2}; & x < 0 \end{cases} \text{ en } x_0 = 0; \quad 4) \begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}; & x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \text{ en } 1$$

$$f(0) = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

Exercice 02

$$1) \text{ Soit } f \text{ une fonction définie sur } \mathbb{R} : \begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1}; & x \neq 1 \\ f(3) = a \end{cases}$$

Déterminer la valeur du réel a pour que f soit continue en 1

$$2) \text{ Soit } f \text{ une fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } \begin{cases} f(x) = \frac{x^3+x^2+x-a}{x-1}, & x \neq 1 \\ f(1) = b \end{cases}$$

Déterminer les réels a et b pour que f soit continue en 1

Exercice 03

Etudier la continuité de la fonction f sur I dans les cas suivants :

$$1) f(x) = x^3 + \sqrt{2}x^2 + x - 3, \quad I = \mathbb{R} \quad ; \quad 2) f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}, \quad I = \mathbb{R}$$

$$3) f(x) = 2\sqrt{x} + x^3 + 3; \quad I = [0, +\infty[\quad ; \quad 4) f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}; \quad I = \mathbb{R}$$

Exercice 04

$$f \text{ une fonction Définie sur } [-2; +\infty[\text{ par } \begin{cases} f(x) = \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2}; & x > 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2}; & -2 \leq x < 2 \\ f(2) = \frac{8}{3} \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 2.

2) Montrer que f est continue sur l'intervalle $[-2; +\infty[$

Exercice 05

Soient f une fonction définie par $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$

1) Déterminer D_f et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

2) Déterminer $f(]-\infty, 2[)$, $f(]2, +\infty[)$ et $f([3, 4])$

Exercice 06

1) Montrer que l'équation $x^{2025} + \sqrt{x} - 1 = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0; 1[$

2) Montrer que l'équation $\sin(x) + x + \frac{1}{2} = 0$, admet une solution unique α dans l'intervalle $[\frac{-\pi}{6}, 0]$

3) Montrons que l'équation $x^5 + x^3 + x = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $0 < \alpha < 1$

4) Montrer que l'équation $x^3 - \frac{1}{x} - 7 = 0$, admet une solution unique α dans l'intervalle $]0, +\infty[$ puis vérifier que $\alpha \in [\frac{3}{2}, 2]$

Exercice 07

f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$.

1) Etudier le sens des variations de f sur $\mathbb{R}$

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $\alpha \in]2; 4[$.

3) Par la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude 0,5

4) Etudier le signe de $f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Exercice 08

f une fonction définie par le tableau de variations, ci-contre
Déterminer le nombre de solution des équations suivantes
Puis encadrer ces solutions.

1) $f(x) = 18$; 2) $f(x) = 0$

3) $f(x) = -3$; 4) $f(x) = 3$

x	-4	-3	-1	1
f	-1	3	-1	19

:

Série d'exercices 1 : Limite et continuité

2 Bac SX

Exercice 09

f une fonction définie sur $I = [1; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 3$

1) Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J que l'on déterminera

2) Déterminer la fonction f^{-1} pour tout x dans J

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x - \sqrt{x}$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis étudier le sens des variations de f

2) Soit g la restriction de f sur $I = [\frac{1}{4}; +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J que l'on déterminera

b) Déterminer la fonction g^{-1} la fonction réciproque de g

c) Résoudre dans $I = [\frac{1}{4}; +\infty[$, l'équation (E) : $g(x) = 6$

Exercice 11

Soit h une fonction définie sur $] -1; 1[$ par : $h(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)$ puis étudier les variations de h

2) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} sur J (à déte...)

3) Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Exercice 12

1) a) Comparer $\sqrt[5]{3}$ et $\sqrt[3]{4}$

b) Mettre les nombres en ordre croissant : $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{4}$ et $\sqrt[6]{6}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes (E₁) : $(x-3)^4 - 16 = 0$

(E₂) : $\sqrt[3]{x+2} - 4\sqrt[6]{x+2} + 3 = 0$; (E₃) : $\sqrt[3]{1-2x} = \sqrt{x+1}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations (I) : $(x-3)^3 < 7$; $2 - \sqrt[3]{x+1} < 0$

Exercice 13

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}$; 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x-1}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-2}$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+x}-8x}{x}$; 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x} + 1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} + 1}$; 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - x$

Exercice 14

Montrer que : $\frac{\sqrt[3]{10^5} \times \sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{15^2} \times \sqrt[3]{2^4}} = 1$; et que $\frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{4}}{2 \sqrt[3]{8^{\frac{1}{2}}} \times \sqrt[4]{32}} = \frac{1}{2 \sqrt[3]{2}}$

Exercice 15

Soit f une fonction définie par : $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2 - 1}$

1) Déterminer D_f puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Soit g la restriction de la fonction f sur $I = [1; +\infty[$

a) Étudier le sens des variations de g sur I

b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} sur J

que l'on déterminera

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tous $x \in J$

3) a) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α tel que : $1 < \alpha < 2$

b) En utilisant la méthode de dichotomie trouver un encadrement de α d'amplitude 0.5

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

1) a) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f^{-1}(x) = 0$

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$

b) Calculer $f(\frac{-1}{4})$ puis en déduire un encadrement de α d'amplitude 0,25

c) Montrer que $\sqrt{\alpha+1} = \frac{-2\alpha}{\alpha+1}$

d) En déduire que $\alpha < -\frac{1}{4\sqrt{2}}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^9 - x^6 + 3x^3 + 1 = 0$

Exercic 01

Etudier la continuité des fonctions suivantes en x_0 :

$$1) \begin{cases} f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}; x \neq 4 \\ f(4) = 4 \end{cases} \text{ en } x_0 = 4; \quad 2) \begin{cases} f(x) = \frac{2x+4}{6-3x}; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1}; x > 1 \end{cases} \text{ en } 1$$

$$3) \begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\sqrt{3}x)}{12x}; x > 0 \\ f(x) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2+\cos x}}{x^2}; x < 0 \end{cases} \text{ en } x_0 = 0; \quad 4) \begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \text{ en } 1$$

Solution :

1) Soit la fonction f définit par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}; x \neq 4 \\ f(4) = 4 \end{cases}$

Etudier la continuité de f en 4.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-2^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$

D'où f est continue en 4

2) Soit f une fonction définit par $\begin{cases} f(x) = \frac{2x+4}{6-3x}; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1}; x > 1 \end{cases}$

Etudier la continuité de f en 1.

On a $f(1) = \frac{2+4}{6-3} = 2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+4}{6-3x} \\ &= \frac{2+4}{6-3} \\ &= 2 \\ &= f(1) \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$;

D'où f est continue à gauche de $a = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2-5x+6) \\ &= 2 \\ &= f(1) \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

D'où f est continue à droite de 1

3) Soit la fonction f définit par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\sqrt{3}x)}{12x}; x > 0 \\ f(x) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2+\cos x}}{x^2}; x < 0 \\ f(0) = \frac{\sqrt{3}}{12} \end{cases}$

Etudier la continuité de f en 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{3}x)}{12x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{\sin(x)}{x} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} = f(0) \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

D'où f est continue à droite de 0

algorithme de HORNER :

x^3	x^2	x	1	
1	-6	11	-6	1
	1	-5	6	

$$1 \times 1 + (-6) = -5; \quad (-5) \times 1 + (11) = 6$$

On obtient :

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

Rappel: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+\cos x} - \sqrt{3}}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{2+\cos x} - \sqrt{3})(\sqrt{2+\cos x} + \sqrt{3})}{x^2 (\sqrt{2+\cos x} + \sqrt{3})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{2+\cos x})^2 - 3^2}{x^2 (\sqrt{2+\cos x} + \sqrt{3})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 + \cos x - 3}{x^2 (\sqrt{2+\cos x} + \sqrt{3})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x - 1}{x^2 (\sqrt{2+\cos x} + \sqrt{3})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{(1 - \cos x)}{x^2} \times \frac{1}{(\sqrt{2+\cos x} + \sqrt{3})} \\
 &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(\sqrt{2+\cos 0} + \sqrt{3})} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} \\
 &= -\frac{1}{4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{12} = f(0)
 \end{aligned}$$

Rappel: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

D'où f est continue à gauche de 0

Conclusion : f est continue en 0

4) Soit f une fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} ; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$

Etudier la continuité de f en 1.

On a : $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 ; \text{ si } x > 1 \\ -(x - 1) ; \text{ si } x \leq 1 \end{cases}$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 = f(1)$

D'où f est continue à droite de 1

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1) = -2 \neq f(1)$

D'où f n'est continue à gauche de 1

Conclusion : f est discontinue en 0

Exercice 02

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1} ; x \neq 1 \\ f(1) = a \end{cases}$

Déterminer la valeur du réel a pour que f soit continue en 3

2) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3+x^2+x-a}{x-1} , x \neq 1 \\ f(1) = b \end{cases}$

Déterminer les réels a et b pour que f soit continue en 1

Solution :

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1} ; x \neq 1 \\ f(1) = a \end{cases}$

Déterminer la valeur du réel a pour que f soit continue en 3

Pour que f soit continue en 1, il faut que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = a$

On pose : $X = x - 1$ donc $x = X + 1$,

d'où : $x \rightarrow 1 \Leftrightarrow X \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(X+1))}{X} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi X + \pi)}{X} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(\pi X)}{\pi X} \times \pi \\
 &= -1 \times \pi = -\pi = a
 \end{aligned}$$

2) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3+x^2+x-a}{x-1} , x \neq 1 \\ f(1) = b \end{cases}$

Déterminer les réels a et b pour que f soit continue en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - a}{x - 1} = \frac{3 - a}{0}$$

Si $3 - a \neq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x^2+x-a}{x-1} = \infty$

Donc $3 - a = 0$, donc $a = 3$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x^2+x-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 2) = 5 = f(1) = b
 \end{aligned}$$

Exercice 03

Etudier la continuité de la fonction f sur I dans les cas suivants :

- 1) $f(x) = x^3 + \sqrt{2}x^2 + x - 3$, $I = [0; 1]$; 2) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$, $I = \mathbb{R}$
 3) $f(x) = 2\sqrt{x} + x^3 + 3$; $I = [0, +\infty[$; 4) $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$; $I = \mathbb{R}$

Solution :

1) **Montrer que $f: x \rightarrow x^3 + \sqrt{2}x^2 + x - 3$ est continue sur $[0; 1]$**

La fonction $f: x \rightarrow x^3 + \sqrt{2}x^2 + x - 3$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est un polynôme, en particulier sur $[0; 1]$; car $[0; 1] \subset \mathbb{R}$

2) **Montrons que la fonction $f: x \rightarrow 2\sqrt{x} + x^3 + 3$ est continue sur $[0; +\infty[$**

- On a la fonction $u: x \rightarrow 2\sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$
- Et on a la fonction $v: x \rightarrow x^3 + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est un polynôme en particulier sur $[0; +\infty[$;
- Donc la fonction $f = u + v$ est continue sur $[0; +\infty[$

3) **Montrons que la fonction $f: x \rightarrow \frac{x+1}{x^2+3}$ est continue sur $\mathbb{R}$**

1ère méthode :

f est une fonction rationnelle donc elle est continue sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ (car $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 + 3 \neq 0$)

2ème méthode :

On a la fonction $u: x \rightarrow x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$

- On a la fonction $v: x \rightarrow x^2 + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$, (polynôme); Et on a $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 3 \neq 0$
- Donc la fonction $f = \frac{u}{v}$ est continue sur $\mathbb{R}$

4) **Montrons que la fonction $f: x \rightarrow \sqrt{x^2 - x + 3}$ est continue sur $\mathbb{R}$**

On a la fonction $u: x \rightarrow x^2 - x + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme)
 Et on a $(\forall x \in \mathbb{R}), x^2 - x + 3 \geq 0$; car le discriminant de $x^2 - x + 3$ est négatif

Donc $f = \sqrt{u}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 04

f une fonction Définie sur $[2; +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2} ; x > 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x + 2} - 2} ; -2 \leq x < 2 \\ f(2) = \frac{8}{3} \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 2.

2) Montrer que f est continue sur l'intervalle $] -2; +\infty[$

Solution :

1) Montrer que f est continue en 2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(3x + 2)}{(x - 2)(x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x + 2}{x + 1} \\ &= \frac{8}{3} \\ &= f(2) \end{aligned}$$

Donc f est continue à droite de 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x + 2} - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2 + 5 - 3^2)(\sqrt{x + 2} + 2)}{(x + 2 - 2^2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2 - 4)(\sqrt{x + 2} + 2)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 2)(\sqrt{x + 2} + 2)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{(2+2)(\sqrt{2+2}+2)}{(\sqrt{2^2+5}+3)}$$

$$= \frac{16}{6} = \frac{8}{3} = f(2) \quad ;$$

Donc f est continue à gauche de 2

Conclusion : f est continue en 2

2) La fonction $u: x \rightarrow \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2}$ est continue sur toutes intervalles

inclu dans $D_u = \mathbb{R} - \{-1; 2\}$; car c'est une fonction rationnelle

Donc elle est continue sur $]2; +\infty[$

➤ La fonction $x \rightarrow -3$ est continue sur $[-2; 2[$

La fonction $x \rightarrow x^2 + 5$ est continue sur $[-2; 2[$

Et $\forall x \in]-2; 2[: x^2 + 5 \geq 0$

Donc La fonction $x \rightarrow \sqrt{x^2+5}$ est continue sur $[-2; 2[$

D'où La fonction $x \rightarrow \sqrt{x^2+5} - 3$ est continue sur $[-2; 2[$

➤ La fonction $x \rightarrow -2$ est continue sur $[-2; 2[$

La fonction $x \rightarrow x + 2$ est continue sur $[-2; 2[$

Et $\forall x \in [-2; 2[: x + 2 \geq 0$

D'où La fonction $x \rightarrow \sqrt{x+2} - 2$ est continue sur $[-2; 2[$

➤ E on a on a : $\forall x \in [-2; 2[: \sqrt{x+2} - 2 \neq 0$

Donc La fonction $x \rightarrow \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2}$ est continue sur $[-2; 2[$

➤ D'où la fonction f est continue sur $[-2; 2[$ et sur $]2; +\infty[$

Et d'après la question 2) on a f est continue en 2

Donc f est continue sur $[-2; 2[\cup]2; +\infty[\cup \{2\} = [-2; +\infty[$

Exercice 05

Soient f une fonction définie par $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$

1) Déterminer D_f et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

2) Déterminer $f(]-\infty, 2[)$, $(]2, +\infty[)$ et $f([3, 4])$

Solution :

Soient f une fonction définie par $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$

1) Déterminer D_f et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

$$\text{Donc } D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-5}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-5}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-5}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty ; \text{ car } x > 2 \Rightarrow x - 2 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x-5}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty ; \text{ car } x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0$$

2) Déterminer $f(]-\infty, 2[)$, $(]2, +\infty[)$ et $f([3, 4])$

On a f est dérivable sur $]-\infty; 2[$ et $]2; +\infty[$ car f c'est une fonction rationnelle

Et pour tout $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{(x-2)^2} = \frac{-6+5}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0$$

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$ et $]2; +\infty[$

$$f(]2; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \right[=]3; +\infty[$$

$$f(]-\infty, 2[) = \left] \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[=]-\infty; 3[$$

$$f([3, 4]) = [f(4); f(3)] = \left[\frac{7}{2}, 4\right]$$

Exercice 06

1) Montrer que l'équation $\sqrt{x} + x^{2025} - 1 = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0; 1[$

2) Montrer que l'équation $\sin(x) + x + \frac{1}{2} = 0$, admet une solution unique α dans l'intervalle $[\frac{-\pi}{6}, 0]$

3) Montrons que l'équation $x^5 + x^3 + x = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $0 < \alpha < 1$

4) Montrer que l'équation $x^3 - \frac{1}{x} - 7 = 0$, admet une solution unique α dans l'intervalle $]0, +\infty[$ puis vérifier que $\alpha \in [\frac{3}{2}, 2]$

Solution :

1) Montrer que l'équation $\sqrt{x} + x^{2025} - 1 = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0; 1[$

On pose pour tout $x \in [0; 1]$: $f(x) = \sqrt{x} + x^{2025} - 1$

On a la fonction $u : x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $[0; 1]$

Et on a la fonction $v : x \rightarrow x^{2025} - 1$ est continue sur $[0; 1]$, car c'est un polynôme

D'où La fonction f est continue sur $[0; 1]$ comme somme des fonctions continues,

De plus $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$

Donc $f(0).f(1) < 0$

La fonction f est dérivable sur $]0; 1[$

Alors $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2025x^{2024} > 0$

Alors f strictement croissante sur $[0, 1]$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaire, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0; 1[$

2) Montrer que l'équation $\sin(x) + x + \frac{1}{2} = 0$, admet une solution unique α dans l'intervalle $[\frac{-\pi}{6}, 0]$

On pose pour tout $x \in [\frac{-\pi}{6}, 0]$: $f(x) = \sin(x) + x + \frac{1}{2} = 0$

On a la fonction $u : x \rightarrow \sin(x)$ est continue sur $[\frac{-\pi}{6}, 0]$

Et on a la fonction $v : x \rightarrow x + \frac{1}{2}$ est continue sur $[\frac{-\pi}{6}, 0]$

Donc La fonction f est continue sur $[\frac{-\pi}{6}, 0]$ comme somme des fonctions continues,

Et on a $f(\frac{-\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ et $f(0) = \frac{1}{2}$ donc $f(\frac{-\pi}{6}).f(0) < 0$

La fonction f est dérivable sur $[\frac{-\pi}{6}, 0]$

Alors $f'(x) = \cos(x) + 1 \geq 0$ car $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

Alors f strictement croissante sur $[\frac{-\pi}{6}, 0]$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaire, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[\frac{-\pi}{6}, 0]$

3) Montrons que l'équation $x^5 + x^3 + x = 1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $0 < \alpha < 1$

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x^5 + x^3 + x - 1$

- f est continue sur $\mathbb{R}$

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$; et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Et de plus on a :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$

Alors $f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

donc $0 \in f(\mathbb{R})$

Donc $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

vérifier que $0 < \alpha < 1$

On a f est continue sur $[0; 1]$ et strictement croissante sur $]0; 1[$

Et on a $f(0) = -1$ et $f(1) = 2$ donc $f(1).f(0) < 0$

Donc $0 < \alpha < 1$

4) Montrer que l'équation $x^3 - \frac{1}{x} - 7 = 0$, admet une solution unique α dans l'intervalle $]0, +\infty[$ puis vérifier que $\alpha \in [\frac{3}{2}, 2]$

On pose pour tout $x \in]0, +\infty[: f(x) = x^3 - \frac{1}{x} - 7$

- On a la fonction $u : x \rightarrow -\frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$
- Et on a la fonction $v : x \rightarrow x^3 - 7$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est un polynôme en particulier sur $]0, +\infty[$

Donc f est continue sur $]0, +\infty[$ comme somme des fonctions continues sur $]0, +\infty[$

- f est dérivable sur $]0, +\infty[$; et $f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^2} > 0$

Donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Et de plus on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - \frac{1}{x} - 7 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 - \frac{1}{x} - 7 = -\infty$$

Alors $f(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-\infty; +\infty[$ donc $0 \in f(\mathbb{R})$

Donc $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$

vérifier que $\alpha \in [\frac{3}{2}, 2]$

On a f est continue sur $[\frac{3}{2}, 2]$ et strictement croissante sur $[\frac{3}{2}, 2]$.

Et on a $f(\frac{3}{2}) = \frac{27}{8} - \frac{2}{3} - 7 < 0$ et $f(2) = 8 - 7 - \frac{1}{2} > 0$

Donc $f(\frac{3}{2}) \cdot f(2) < 0$ donc $\alpha \in [\frac{3}{2}, 2]$

Exercice 07

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$

- 1) Etudier le sens des variations de f sur $\mathbb{R}$
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $\alpha \in]2; 4[$.
- 3) Par la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude 0,5
- 4) Etudier le signe de $f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Solution :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$$

1) Etudier le sens des variations de f sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{On a } f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

On dresse le tableau de variations de f

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$	$-\infty$	-5	-9	$+\infty$

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $\alpha \in]2; 4[$.

On a -5 est une valeur maximale de f sur $] -\infty; 2[$

$$\text{Donc } \forall x \in] -\infty; 2[: f(x) \leq -5$$

Donc f ne s'annule pas sur $] -\infty; 2[$

* La fonction f est **continue sur $[2; +\infty[$** car c'est un polynôme

* La fonction f est **strictement croissante** sur $[2; +\infty[$

$$* f([2; +\infty[) = \left[f(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= [-9; +\infty[$$

Donc $0 \in f([2; +\infty[)$

Donc $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[2; +\infty[$

D'où $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

Vérifions que $2 < \alpha < 4$

* La fonction f est **continue sur $[2; 4]$** car c'est un polynôme

* La fonction f est **strictement croissante** sur $[2; 4]$

$$* g(2) = -9 \text{ et } g(4) = 11 \text{ donc } g(2) \times g(4) < 0$$

Donc $2 < \alpha < 4$

3) Par la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude 0,5

On a le centre de l'intervalle $[2; 4]$ est $c = \frac{4+2}{2} = 3$

on a $f(c) = f(3) = -5$; Et on a $f(4) = 11$

Donc $f(3) \times f(4) < 0$; donc $3 < \alpha < 4$

Et on a l'amplitude de l'intervalle $[3; 4]$ est $1 = 4 - 3 = 1$

On a le centre de l'intervalle $[3; 4]$ est $c = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}$

on a $f(c) = f\left(\frac{7}{2}\right) = 124,5$; Et on a $f(3) = -5$

Donc $f(3) \times f\left(\frac{7}{2}\right) < 0$, donc $3 < \alpha < \frac{7}{2}$

Et on a l'amplitude de l'intervalle $] -1; 0[$ est $1 = \frac{7}{2} - 3 = 0,5$

4) Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$

On a -5 est une valeur maximale de f sur $] -\infty; 2[$

Donc $\forall x \in] -\infty; 2[: f(x) \leq -5$

Donc $\forall x \in] -\infty; 2[: f(x) < 0$

Soit $x \in]2; \alpha]$

Donc $x \leq \alpha$ et on a f est strictement croissante sur $]2; \alpha]$

Donc $f(x) \leq f(\alpha)$

Et on a α solution de l'équation $f(x) = 0$ donc $f(\alpha) = 0$

D'où $f(x) \leq 0$

Soit $x \in [\alpha, +\infty[$

Donc $x \geq \alpha$ et on a f est strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$

Donc $f(x) \geq f(\alpha)$

Et on a α solution de l'équation $f(x) = 0$ donc $f(\alpha) = 0$

D'où $f(x) \geq 0$

Le tableau de signe de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Exercice 08

f une fonction définit par le tableau de variations, ci-contre
Déterminer le nombre de solution des équations suivantes puis encadrer ces solutions.

x	-4	-3	-1	1
f	-1	3	-1	19

1) $f(x) = 18$; 2) $f(x) = 0$; 3) $f(x) = -3$; 4) $f(x) = 3$

Solution :

1) L'équation $f(x) = 18$

Possède 1 solution compris dans l'intervalle $] -1; 1[$.

Car $18 \in f(]-1; 1]) =]-1; 19[$

Et f est continue et strictement croissante sur $] -1; 1[$

2) L'équation $f(x) = 0$

Possède 3 solutions chacune comprise dans un des intervalles

$] -4; -3[$, $] -3; -1[$ et $] -1; 1[$.

3) L'équation $f(x) = -3$

ne possède pas de solution.

4) L'équation $f(x) = 3$

possède 2 solutions : l'une égale à -3 , l'autre comprise dans l'intervalle $] -1; 1[$.

Exercice 09

Soit f une fonction définie sur $I = [1; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 5$

1) Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

2) Déterminer la fonction f^{-1}

Solution :

1) la fonction f est continue sur $[1; +\infty[$ (car c'est une polynôme)

➤ f est dérivable sur $]1; +\infty[$

et on a pour tout $x \in]1; +\infty[$: $f'(x) = 2x - 2$

➤ On a $x \in]1; +\infty[$

➤ Donc $2x > 2$ donc $2x - 2 > 0$

Donc $\forall x \in]1; +\infty[$: $f'(x) > 0$

Donc f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$

Alors la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J

On a : $J = f(I) = f([1; +\infty[) = [f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [4; +\infty[$

2) Déterminer la fonction f^{-1} , la fonction réciproque de f

Avec f définie sur $I = [1; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 5$

Soit $x \in J = [4; +\infty[$ et $y \in I = [1; +\infty[$ tel que $y = f^{-1}(x)$, on a :

$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y + 5 = x$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y = x - 5$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = x - 5 + 1$$

$$\Leftrightarrow (y - 1)^2 = x - 4$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = \sqrt{x - 4} \quad \text{ou} \quad y - 1 = -\sqrt{x - 4}$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = \sqrt{x - 4} \quad (\text{car } y - 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{x - 4} + 1$$

Donc $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 4} + 1$ pour tout $x \in J = [4; +\infty[$

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x - \sqrt{x}$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis étudier le sens des variations de f

2) Soit g la restriction de f sur $I = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J que l'on déterminera

b) Déterminer la fonction g^{-1} la fonction réciproque de g

c) Résoudre dans $I = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$, l'équation (E) : $g(x) = 6$

Solution :

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x - \sqrt{x}$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis étudier le sens des variations de f

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{x \times \sqrt{x}}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{(\sqrt{x})^2}{x \times \sqrt{x}}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Soit $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{(2\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 1)}{2\sqrt{x} (2\sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{4x - 1}{2\sqrt{x} (2\sqrt{x} + 1)} \end{aligned}$$

On a : $2\sqrt{x}(2\sqrt{x} + 1) > 0$

$$\triangleright f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

On dresse le tableau de variation de f

x	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$f(0) = 0$	$f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$	$+\infty$

2) a) Montrons que g la restriction de f sur $I = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$ admet une fonction réciproque g^{-1} définit sur J que l'on déterminera ($g(x) = f(x) = x - \sqrt{x}$)

$\triangleright$ la fonction $x \rightarrow x$ est continue $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$

la fonction $x \rightarrow -\sqrt{x}$ est continue sur $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$

Donc la fonction g est continue sur $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$

(car elle est somme de deux Fonction continue sur)

$\triangleright$ D'après 1) on a g est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$

Et on a vu que g est continue sur $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$

Alors la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définit sur :

$$J = g(I) = g\left(\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[\right)$$

$$= \left[g\left(\frac{1}{4}\right); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)\right[$$

$$= \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$$

b) Déterminer la fonction g^{-1} la fonction réciproque de g

définit sur $I = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$ par : $g(x) = x - \sqrt{x}$

Soit $x \in J = \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$ et $y \in I = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$ tel que $y = f^{-1}(x)$

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow y - \sqrt{y} = x$$

$$\Leftrightarrow y - \sqrt{y} = x$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y})^2 - 2 \times \frac{1}{2} \sqrt{y} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y} - \frac{1}{2})^2 = x + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} - \frac{1}{2} = \sqrt{x + \frac{1}{4}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{y} - \frac{1}{2} = -\sqrt{x + \frac{1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} - \frac{1}{2} = \sqrt{x + \frac{1}{4}} \quad (\text{car } \sqrt{y} - \frac{1}{2} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2$$

Donc $g^{-1}(x) = \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2$ pour tout $x \in J = \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$

c) Résoudre dans $I = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$, l'équation (E) : $g(x) = 6$

$$g(x) = 6 \Leftrightarrow x = g^{-1}(6)$$

$$\Leftrightarrow x = \left(\sqrt{6 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2 = 9$$

Exercice 11

Soit h une fonction définie sur $] -1; 1[$ par : $h(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)$ puis étudier les variations de h
- 2) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} sur J (à déte...)
- 3) Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Solution :

Soit h une fonction définie sur $] -1; 1[$ par : $h(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)$ puis étudier les variations de h

Tableau de signe de $1 - x^2$

x	0	-1	1	$+\infty$
$1 - x^2$	-	0	+	0

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x}{1-x^2} = \frac{''-2''}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{1-x^2} = \frac{''2''}{0^+} = +\infty$$

Les variations de h

La fonction $x \rightarrow \frac{2x}{1-x^2}$ est dérivable sur son domaine de définition qui est : $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ car c'est une fonction rationnelle

Donc la fonction h est dérivable sur $] -1; 1[$

Soit $x \in] -1; 1[$

$$h'(x) = \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)' = \frac{2(1-x^2) + 4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2} > 0$$

Donc h est strictement croissante sur $] -1; 1[$

2) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} sur J

On a la fonction h est continue sur $] -1; 1[$ car elle est dérivable
Et on a h est strictement croissante sur $] -1; 1[$

Alors la fonction g admet une fonction réciproque h^{-1} définit sur : $J = h(I) = h(]-1; 1[)$

$$= \left[\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x); \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \right[\\ =]-\infty; +\infty[$$

3) Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Soit $x \in J = \mathbb{R}$ et $y \in I =] -1; 1[$ tel que $y = h^{-1}(x)$

$$y = h^{-1}(x) \Leftrightarrow h(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y}{1-y^2} = x$$

$$\Leftrightarrow 2y = x(1-y^2)$$

$$\Leftrightarrow xy^2 + 2y - x = 0$$

Si $x = 0$ alors $y = 0$

$$\text{Donc } h^{-1}(0) = 0$$

Si $x \neq 0$

$$\Delta = 4 + 4x^2 > 0$$

$$\text{Donc } y = \frac{-2 + \sqrt{4+4x^2}}{2x} \quad \text{ou} \quad y = \frac{-2 - \sqrt{4+4x^2}}{2x}$$

$$\text{Donc } y_1(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \quad \text{ou} \quad y_2(x) = \frac{-(1+\sqrt{1+x^2})}{x}$$

$$\text{On a } h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \quad \text{donc } h^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$y_1\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\sqrt{1+\frac{16}{9}}-1}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{5}{3}-1}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } h^{-1}(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \quad \text{si } x \in \mathbb{R}^* \text{ et } h^{-1}(0) = 0$$

Exercice 12

1)a) Comparer $\sqrt[5]{3}$ et $\sqrt[3]{4}$ b) Mettre les nombres en ordre croissant : $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{4}$ et $\sqrt[6]{6}$ 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes $(E_1) : (x-3)^4 - 16 = 0$ $(E_2) : \sqrt[3]{x+2} - 4\sqrt[6]{x+2} + 3 = 0$; $(E_3) : \sqrt[3]{1-2x} = \sqrt{x+1}$ 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $\sqrt[3]{x+1} - 2 < 0$; $\sqrt[3]{4-2x} > \sqrt[3]{x+1}$

Solution :

1)a) Comparer $\sqrt[5]{3}$ et $\sqrt[3]{2}$ On a : $\sqrt[5]{3} = \sqrt[5 \times 3]{3^3} = \sqrt[15]{27}$ et $\sqrt[3]{2} = \sqrt[5 \times 3]{2^5} = \sqrt[15]{32}$ Donc : $\sqrt[5]{3} < \sqrt[3]{2}$ b) Mettre les nombres en ordre croissant : $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{4}$ et $\sqrt[6]{6}$

$$\sqrt{2} = \sqrt[2 \times 6]{2^6} = \sqrt[12]{64}$$

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[4 \times 3]{3^4} = \sqrt[12]{81}$$

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4 \times 3]{4^3} = \sqrt[12]{64}$$

$$\sqrt[6]{6} = \sqrt[6 \times 2]{6^2} = \sqrt[12]{36}$$

Donc : $\sqrt[6]{6} < \sqrt{2} = \sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}$ 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes $(E_1) : (x-3)^4 - 16 = 0$ $(E_2) : \sqrt[3]{x+2} - 4\sqrt[6]{x+2} + 3 = 0$; $(E_3) : \sqrt[3]{1-2x} = \sqrt{x+1}$ $(E_1) : (x-3)^4 - 16 = 0$ $(E) \Leftrightarrow (x-3)^4 - 16 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-3)^4 = 16 \Leftrightarrow \sqrt[4]{(x-3)^4} = \sqrt[4]{16}$$

$$\Leftrightarrow |x-3| = 2 \Leftrightarrow x-3 = 2 \text{ ou } x-3 = -2$$

Donc $S = \{5; 1\}$ $(E_2) : \sqrt[3]{x+2} - 4\sqrt[6]{x+2} + 3 = 0$;L'équation (E_2) est définie si $x+2 \geq 0$ Donc le domaine de définition est : $D_{(E_2)} = [-2; +\infty[$

$$(E_2) \Leftrightarrow (\sqrt[5]{x+2})^2 - 4\sqrt[5]{x+2} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (X)^2 - 4X + 3 = 0 \text{ avec } X = \sqrt[5]{x+2}$$

$$\Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = 3 \text{ avec } X = \sqrt[5]{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[5]{x+2} = 1 \text{ ou } \sqrt[5]{x+2} = 3$$

$$\Leftrightarrow x+2 = 1^5 \text{ ou } x+2 = 3^5$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3^5 - 2$$

Les deux solutions sont dans $D_{E_2} = [-2; +\infty[$ Donc $S = \{-1; 3^5 - 2\}$ $(E_3) : \sqrt[3]{1-2x} = \sqrt{x+1}$

$$x \in D_{(E_3)} \Leftrightarrow 1-2x \geq 0 \text{ et } x+2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \text{ et } x \geq -2$$

Donc le domaine de (E_3) est : $D_{(E_3)} = \left[-2; \frac{1}{2}\right]$

$$(E_3) \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-2x} = \sqrt[2]{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[6]{(1-2x)^2} = \sqrt[6]{(x+1)^3}$$

$$\Leftrightarrow (1-2x)^2 = (x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow 1-4x+4x^2 = x^3+3x^2+3x+1$$

$$\Leftrightarrow x^3-x^2+7x=0 \Leftrightarrow x(x^2-x+7)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x^2-x+7=0$$

$$\Leftrightarrow x=0$$

Donc $S = \{0\}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations : $(x-3)^3 < 7$; $2 - \sqrt[3]{x+1} < 0$

$$(I_1) : (x-3)^3 < 7$$

$$(I_1) \Leftrightarrow (x-3)^3 < 7$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-3)^3} < \sqrt[3]{7}$$

$$\Leftrightarrow x-3 < \sqrt[3]{7}$$

$$\Leftrightarrow x < \sqrt[3]{7} + 3$$

$$\text{Donc } S =]-\infty; \sqrt[3]{7} + 3[$$

$$(I_2) : \sqrt[3]{x+1} - 2 < 0$$

$$x \in D_{(I_2)} \Leftrightarrow x+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1$$

$$\text{Donc le domaine de } (I_2) \text{ est : } D_{(I_2)} = [-1; +\infty[$$

$$(I_2) \Leftrightarrow 2 - \sqrt[3]{x+1} < 0$$

$$\Leftrightarrow 2 < \sqrt[3]{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 8 < x+1$$

$$\Leftrightarrow 7 < x \Leftrightarrow x \in [7; +\infty[$$

$$S = [7; +\infty[\cap [-1; +\infty[= [7; +\infty[$$

Exercice 13

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x-9} ; 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}} ; 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} ; 4) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x-2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+x} - 8x}{x} ; 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x+1}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x+1}} ; 7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - x$$

Solution :

$$1) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x-9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{x-1} - 2 = \sqrt[3]{9-1} - 2 = \sqrt[3]{8} - 2 = 0, \text{ et } \lim_{x \rightarrow 9} x - 9 = 0$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{0}{0}$ ".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

$$\text{Rappel ; } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x-9} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt[3]{x-1})^3 - 2^3}{(x-9)[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-1-8}{(x-9)[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)}{(x-9)[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2]} = \frac{1}{[(\sqrt[3]{8})^2 + 2\sqrt[3]{8} + 2^2]} \\ &= \frac{1}{[4+4+4]} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty, \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2+3} = +\infty$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{+\infty}{+\infty}$ ".

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{\sqrt[3]{(x^2+3)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{(x^2+3)^2}} = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^3}{(x^2+3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\begin{aligned} 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x})^2 - 1^2}{(\sqrt[3]{x})^3 - 1^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt[3]{x} - 1)[(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt[3]{x-1} - 2 = \sqrt[3]{2-1} - 2 = -1, \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 = 0^+$$

$$\text{Donc: } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x-2} = -\infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x} - 8x}{x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x} - 8x}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3(1 + \frac{x}{x^3})} - 8x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \times \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - 8x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - 8 \right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - 8 \\ &= 1 - 8 \\ &= -7 \end{aligned}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x} + 1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x} + 1 = +\infty, \text{ et } \lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + 1 = +\infty$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{+\infty}{+\infty}$ ".

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[12]{x})^3 + (\sqrt[12]{x})^4 + 1}{(\sqrt[12]{x})^4 + (\sqrt[12]{x})^6 + 1}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[12]{x})^4 \left(1 + \frac{(\sqrt[12]{x})^3}{(\sqrt[12]{x})^4} + \frac{1}{(\sqrt[12]{x})^4} \right)}{(\sqrt[12]{x})^6 \left(1 + \frac{(\sqrt[12]{x})^4}{(\sqrt[12]{x})^6} + \frac{1}{(\sqrt[12]{x})^6} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt[12]{x}} + \frac{1}{\sqrt[12]{x^3}} \right)}{(\sqrt[12]{x})^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt[12]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt[12]{x^6}} \right)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[12]{x})^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[12]{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[12]{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[12]{x^6}} = 0)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - x$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3 + x^2})^3 - x^3}{(\sqrt[3]{x^3 + x^2})^2 + x \sqrt[3]{x^3 + x^2} + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - x^3}{(\sqrt[3]{x^3 + x^2})^2 + x \sqrt[3]{x^3 + x^2} + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(\sqrt[3]{x^3 + x^2})^2 + x \sqrt[3]{x^3 + x^2} + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} \right)^2 + x^2 \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} \right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exercice 14

Montrer que $\frac{\sqrt[3]{10^5} \times \sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{15^2} \times \sqrt[3]{2^4}} = 10$ et $\frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{4}}{2 \sqrt[3]{8^2} \times \sqrt[4]{32}} = \frac{1}{2 \sqrt[3]{2}}$

Solution :

$$\begin{aligned} * \frac{\sqrt[3]{10^5} \times \sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{15^2} \times \sqrt[3]{2^4}} &= \frac{(2 \times 5)^{\frac{5}{3}} \times (2 \times 3)^{\frac{2}{3}}}{(3 \times 5)^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}}} \\ &= \frac{2^{\frac{5}{3}} \times 5^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}}} \\ &= 2^{\frac{5}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}} \times 3^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}} \times 5^{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{3}{3}} \times 3^0 \times 5^{\frac{3}{3}} \\ &= 2^1 \times 1 \times 5^1 \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{4}}{2 \sqrt[3]{8^2} \times \sqrt[4]{32}} &= \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{2^2}}{2 \times (2^3)^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} \times 2^{\frac{12}{5}}} \\ &= \frac{2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{2}{4}}}{2 \times 2^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} \times 2^{\frac{12}{5}}} \\ &= 2^{\frac{1}{3} + \frac{2}{4} - 1 - \frac{3}{6} - \frac{5}{12}} \\ &= 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{5}{12}} \\ &= 2^{\frac{4+3-12-6-5}{12}} \\ &= 2^{\frac{-16}{12}} = 2^{-\frac{4}{3}} \\ &= \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^3 \times 2}} = \frac{1}{2 \sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

Exercice 15

Soit f une fct définie par : $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2 - 1}$

1) Déterminer D_f puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Soit g la restriction de f sur $I = [1; +\infty[$

a) Etudier le sens de variations de g sur I

b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} sur J que l'on déterminera

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tous $x \in J$

3)a) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α tel que : $1 < \alpha < 2$

b) En utilisant la méthode de dichotomie trouver un encadrement de α d'amplitude 0.5

Solution :

Soit f une fct définie par : $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2 - 1}$

1) Déterminer D_f puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Rappel : $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a$ avec $a > 0$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$\Rightarrow x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1$$

$$\text{Donc : } D_f =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \sqrt[3]{x^2 - 1} = -\infty. \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1 = +\infty$$

2) Soit g la restriction de f sur $I = [1; +\infty[$

a) Etudier le sens de variations de g sur I

Soient $x, y \in [1; +\infty[$ tel que : $x < y$

$$x < y \Rightarrow x^2 < y^2 \Rightarrow x^2 - 1 < y^2 - 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^2 - 1} < \sqrt[3]{y^2 - 1} \Rightarrow -\sqrt[3]{x^2 - 1} > -\sqrt[3]{y^2 - 1}$$

$$\Rightarrow 2 - \sqrt[3]{x^2 - 1} > 2 - \sqrt[3]{y^2 - 1} \Rightarrow g(x) > g(y)$$

D'où g est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} sur J que l'on déterminera

* La fonction $x: \mapsto x^2 - 1$ est continue sur $I = [1; +\infty[$

$$\text{Et } \forall x \in [1; +\infty[: x^2 - 1 \geq 0$$

Donc la fonction $x: \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est continue sur $I = [1; +\infty[$

➤ D'où $g: x \mapsto 2 - \sqrt[3]{x^2 - 1}$ **est continue** sur $[1; +\infty[$

➤ La fonction est **strictement décroissante** sur $[1; +\infty[$

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} sur J

$$J = f([1; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(1) \right] =]-\infty; 2]$$

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tous $x \in J$

c) Soit $x \in]-\infty; 2]$ cherchons $y \in [1; +\infty[$ tel que $y = g^{-1}(x)$;

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow g(y) = x$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt[3]{y^2 - 1} = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y^2 - 1} = 2 - x$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{y^2 - 1} \right)^2 = (2 - x)^3 ;$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 1 = (2 - x)^3$$

$$\Leftrightarrow y^2 = (2 - x)^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{(2 - x)^3 + 1}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{(2 - x)^3 + 1} \quad ; y \in [1; +\infty[$$

D'où : $g^{-1}(x) = \sqrt{(2 - x)^3 + 1}$; pour tous $x \in]-\infty; 2]$

3)a) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α tel que : $1 < \alpha < 2$

Considérons la fonction h défini par $h(x) = g(x) - x$

La fonction g est continue sur $[1; +\infty[$

Et la fonction $x: \mapsto -x$ est continue sur $[1; +\infty[$

D'où la fonction h est continue sur $[1; +\infty[$

La fonction g est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

Et la fonction $x: \mapsto -x$ est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

D'où la fonction h est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

Car c'est une somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $[1; +\infty[$

$$h(1) = g(1) - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$$

$$h(2) = g(2) - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$$

➤ **Donc $h(1) \times h(2) < 0$**

D'où l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α tel que : $1 < \alpha < 2$

C-à-dire que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α tel que : $1 < \alpha < 2$

b) En utilisant la méthode de dichotomie trouver un encadrement de α d'amplitude 0.5

On a $1 < \alpha < 2$

Le centre de l'intervalle $]1; 2[$ est $c = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$

$$\text{on a } h(c) = h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6} ;$$

$$\text{Et on a } h(1) = -1$$

$$\text{Donc } h\left(\frac{3}{2}\right) \times h(1) < 0$$

$$\text{Donc } 1 < \alpha < \frac{3}{2} \quad \text{et on a l'amplitude } l = \frac{3}{2} - 1 = 0,5$$

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

1) a) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f^{-1}(x) = 0$

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$

b) Calculer $f\left(-\frac{1}{4}\right)$ puis en déduire un encadrement de α d'amplitude 0,25

c) Montrer que $\sqrt{\alpha + 1} = \frac{-2\alpha}{\alpha + 1}$

d) En déduire que $\alpha < -\frac{1}{4\sqrt{2}}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^9 - x^6 + 3x^3 + 1 = 0$

Solution :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

1) a) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

La fonction f est dérivable sur I car c'est un polynôme, et pour tout

x dans $\mathbb{R}$ on a $f'(x) = 3x^2 - 2x + 3$

On a $\Delta = 4 - 4 \times 3 \times 3 = -32 < 0$

Donc le signe de $3x^2 - 2x + 3$ est le signe de $a = 3 > 0$

Donc $f'(x) = 3x^2 - 2x + 3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

* La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (Polynôme)

* La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J et :

$$J = f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= \mathbb{R}$$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f^{-1}(x) = 0$

$$f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = f(0)$$

$$\Leftrightarrow x = f(0)$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$

* La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme

* La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$* g(\mathbb{R}) = g(]-\infty; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$$

Donc $0 \in f(\mathbb{R})$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

Vérifions que $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$

* La fonction f est continue sur $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ car c'est un polynôme

* La fonction f est strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$

$$* f(0) = 1 \text{ et } f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{-1-2-12+8}{8} = \frac{-7}{8} < 0$$

$$\text{Donc } f(0) \times f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$$

$$\text{Donc } -\frac{1}{2} < \alpha < 0$$

b) Calculer $f\left(-\frac{1}{4}\right)$ puis en déduire un encadrement de α d'amplitude 0,25

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{64} - \frac{1}{16} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{-1-4-48+64}{64} = \frac{10}{64} > 0$$

$$\text{On a } f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-7}{8} < 0$$

$$\text{Donc } f\left(-\frac{1}{2}\right) \times f\left(-\frac{1}{4}\right) < 0$$

$$\text{Donc } -\frac{1}{2} < \alpha < -\frac{1}{4}$$

c) Montrer que $\sqrt{\alpha+1} = \frac{-2\alpha}{\alpha+1}$

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha^2 + 3\alpha + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha^2 + 4\alpha^2 + 3\alpha + 1 = 4\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1 = 4\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + 1)^3 = 4\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + 1)(\alpha + 1)^2 = 4\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha + 1 = \frac{4\alpha^2}{(\alpha + 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\alpha + 1} = \frac{2|\alpha|}{\alpha + 1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\alpha + 1} = -\frac{2\alpha}{\alpha + 1} \text{ car } \alpha < 0$$

d) En déduire que $\alpha < -\frac{1}{4\sqrt{2}}$

$$\text{On a } \sqrt{\alpha + 1} = \frac{-2\alpha}{\alpha + 1}$$

$$\text{Donc } \alpha + 1 = \frac{4\alpha^2}{(\alpha + 1)^2}$$

$$\text{Donc } (\alpha + 1)^3 = 4\alpha^2$$

$$\text{D'autre part on a } -\frac{1}{2} < \alpha$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2} < \alpha + 1$$

$$\text{Donc } \frac{1}{8} < (\alpha + 1)^3$$

$$\text{Donc } \frac{1}{8} < 4\alpha^2$$

$$\text{Donc } \frac{1}{32} < \alpha^2$$

$$\text{Donc } \frac{1}{\sqrt{32}} < |\alpha|$$

$$\text{Donc } \frac{1}{4\sqrt{2}} < -\alpha \text{ car } \alpha < 0$$

$$\text{Alors } \alpha < -\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^9 - x^6 + 3x^3 + 1 = 0$

$$x^9 - x^6 + 3x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^3)^3 - (x^3)^2 + 3x^3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^3 - X^2 + 3X + 1 = 0 \text{ avec } X = x^3$$

$$\Leftrightarrow f(X) = 0 \text{ avec } X = x^3$$

$$\Leftrightarrow X = \alpha \text{ avec } X = x^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 = \alpha ; \alpha < 0$$

$$\Leftrightarrow (-x)^3 = -\alpha ; \alpha < 0$$

$$\Leftrightarrow -x = \sqrt[3]{-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{-\alpha}$$

$$\text{Donc } S = \{-\sqrt[3]{-\alpha}\}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

x	0	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	-1	-4

Donc $\forall x \in]0; +\infty[: f(x) \leq -1$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[: f(x) < 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) \geq 2$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	1	$+\infty$

