

# LES SUITES – Chapitre 1/2

▶ Tout le cours en vidéo : [https://youtu.be/MJv7\\_pkFcdA](https://youtu.be/MJv7_pkFcdA)

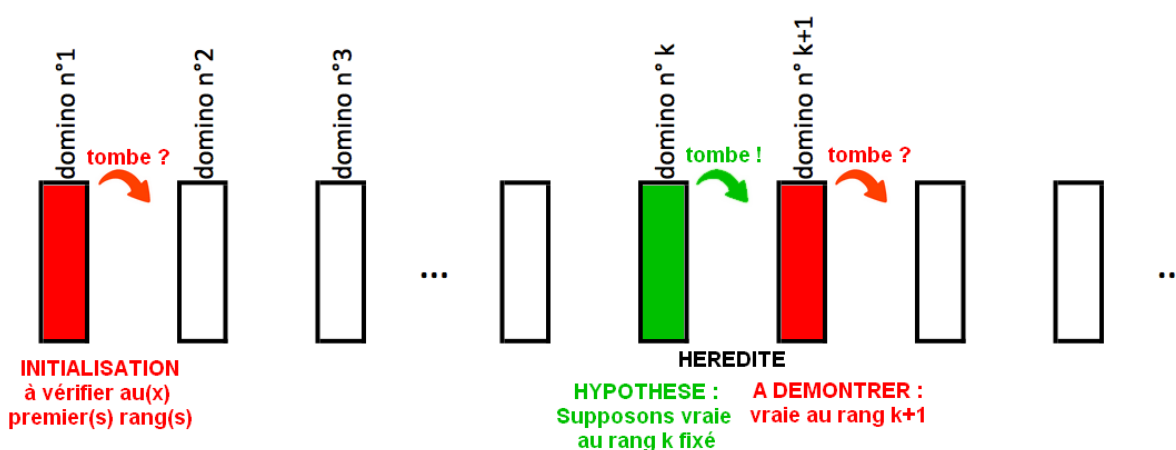
## Partie 1 : Raisonnement par récurrence

### 1) Le principe



*C'est au mathématicien italien Giuseppe Peano (1858 ; 1932), ci-contre, que l'on attribue le principe du raisonnement par récurrence. Le nom a probablement été donné par Henri Poincaré (1854 ; 1912).*

On considère une file illimitée de dominos placés côte à côte. La règle veut que lorsqu'un domino tombe, alors il fait tomber le domino suivant et ceci à n'importe quel niveau de la file. Alors, si le premier domino tombe, on est assuré que tous les dominos de la file tombent.



Si on suppose qu'un domino  $n^\circ(k)$  tombe alors le domino suivant  $n^\circ(k+1)$  tombe également. C'est ce qu'on appelle le principe d'hérédité.

**Définition :** On dit qu'une propriété est **héréditaire** à partir d'un certain rang :  
Si la propriété est vraie pour un entier  $k$ , alors elle est vraie pour l'entier  $k+1$ .

**Principe du raisonnement par récurrence :**

Si la propriété  $P$  est : - vraie au rang  $n_0$  (Initialisation),  
- héréditaire à partir du rang  $n_0$  (Hérédité),  
alors la propriété  $P$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ .

Dans l'exemple, le premier domino tombe (initialisation). Ici  $n_0 = 1$ .

L'hérédité est vérifiée (voir plus haut). On en déduit que tous les dominos tombent.

Remarque : On tente d'utiliser une démonstration par récurrence, lorsqu'une démonstration classique n'est pas possible ou est trop difficile..

### Méthode : Démontrer une propriété par récurrence

 Vidéo <https://youtu.be/udGGIHdSAgc>

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :  $2^n > n$ .

#### Correction

- **Initialisation pour  $n=1$  :**

→ Le premier domino tombe.

$$2^1 = 2 > 1.$$

La propriété est donc vraie pour  $n = 1$ .

- **Hérédité :**

- Hypothèse de récurrence :

→ On suppose que le domino n° ( $k$ ) tombe.

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier  $k$  non nul :  $2^k > k$ .

- Démontrons que :

→ Prouvons que le domino n° ( $k+1$ ) tombe.

La propriété est vraie au rang  $k + 1$ , soit :  $2^{k+1} > k + 1$  ???

$$\begin{aligned} 2^k &> k, \text{ par hypothèse de récurrence} \\ 2 \times 2^k &> 2 \times k \\ 2^{k+1} &> 2k \\ 2^{k+1} &> k + k \\ 2^{k+1} &> k + k \geq k + 1, \text{ car } k \geq 1 \\ 2^{k+1} &> k + 1 \end{aligned}$$

→ Le domino n° ( $k+1$ ) tombe.

- **Conclusion :**

→ Tous les dominos tombent.

La propriété est vraie pour  $n = 1$  et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel  $n$  non nul, soit :  $2^n > n$ .

## 2) Exemples avec les suites

### Méthode : Démontrer par récurrence l'expression générale d'une suite

 Vidéo <https://youtu.be/OIUi3MG8efY>

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$  et  $u_0 = 1$ .

Démontrer par récurrence que :  $u_n = (n + 1)^2$ .

#### Correction

- **Initialisation pour  $n = 0$  :**

→ Le premier domino tombe.

$$(0 + 1)^2 = 1 = u_0.$$

La propriété est donc vraie pour  $n = 0$ .

- **Hérédité :**

- Hypothèse de récurrence : → On suppose que le domino n° (k) tombe.

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier  $k$  :  $u_k = (k + 1)^2$ .

- Démontrons que : → Prouvons que le domino n° (k+1) tombe.

La propriété est vraie au rang  $k + 1$ , soit :  $u_{k+1} = (k + 1 + 1)^2$ , soit encore :

$$u_{k+1} = (k + 2)^2 ???$$

$$u_{k+1} = u_k + 2k + 3, \text{ par définition}$$

$$= (k + 1)^2 + 2k + 3, \text{ par hypothèse de récurrence}$$

$$= k^2 + 2k + 1 + 2k + 3$$

$$= k^2 + 4k + 4$$

$$= (k + 2)^2$$

→ Le domino n° (k+1) tombe.

- **Conclusion :**

→ Tous les dominos tombent.

La propriété est vraie pour  $n = 0$  et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel  $n$ , soit :  $u_n = (n + 1)^2$ .

### Méthode : Démontrer la monotonie par récurrence

 **Vidéo** <https://youtu.be/nMnLaE2RAGk>

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$  et  $u_0 = 2$ .

Démontrer par récurrence que la suite  $(u_n)$  est croissante.

### **Correction**

On va démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_{n+1} \geq u_n$

- **Initialisation :**  $u_0 = 2$  et  $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 2 + 2 = \frac{8}{3} > 2$

donc  $u_1 \geq u_0$ .

La propriété est donc vraie pour  $n = 0$ .

- **Hérédité :**

- Hypothèse de récurrence :

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier  $k$  :  $u_{k+1} \geq u_k$ .

- Démontrons que : La propriété est vraie au rang  $k + 1$ , soit :  $u_{k+2} \geq u_{k+1}$ .

On a  $u_{k+1} \geq u_k$  donc :

$$\frac{1}{3}u_{k+1} \geq \frac{1}{3}u_k$$

$$\frac{1}{3}u_{k+1} + 2 \geq \frac{1}{3}u_k + 2$$

$$u_{k+2} \geq u_{k+1}.$$

- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour  $n = 0$  et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel  $n$ , soit :  $u_{n+1} \geq u_n$  et donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

### 3) Inégalité de Bernoulli

**Propriété :** Soit un nombre réel  $a$  positif.  
 Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $(1 + a)^n \geq 1 + na$ .

#### Démonstration au programme :

 **Vidéo** [https://youtu.be/H6XJ2tB1\\_fg](https://youtu.be/H6XJ2tB1_fg)

- **Initialisation :**

$$(1 + a)^0 = 1 \text{ et } 1 + 0 \times a = 1.$$

La propriété est vraie pour  $n = 0$ .

- **Hérédité :**

- Hypothèse de récurrence :

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier  $k$  :  $(1 + a)^k \geq 1 + ka$

- Démontrons que : La propriété est vraie au rang  $k + 1$ , soit :

$$(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$$

On a :  $(1 + a)^k \geq 1 + ka$ , d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc :  $(1 + a)(1 + a)^k \geq (1 + a)(1 + ka)$ , car  $1 + a > 0$ .

$$(1 + a)^{k+1} \geq 1 + ka + a + ka^2$$

$$(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a + ka^2 \geq 1 + (k + 1)a, \text{ car } ka^2 \geq 0.$$

Donc :  $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$ .

- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour  $n = 0$  et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel  $n$  soit :  $(1 + a)^n \geq 1 + na$ .

### 4) Le rôle de l'initialisation dans une démonstration par récurrence

L'initialisation (le 1<sup>er</sup> domino tombe) est indispensable dans une démonstration par récurrence, sinon on peut démontrer des propriétés fausses !

En effet, démontrons par exemple que la propriété «  $2^n$  est divisible par 3 » est héréditaire sans vérifier l'initialisation.

Supposons que pour un certain entier  $k$  : «  $2^k$  est divisible par 3 ». Donc il existe un entier  $p$  tel que :  $2^k = 3p$ .

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2^k \times 2 \\ &= 3p \times 2 \text{ (d'après l'hypothèse de récurrence).} \\ &= 6p \\ &= 3 \times 2p, \text{ avec } 2p \text{ entier} \end{aligned}$$

Donc  $2^{k+1}$  est divisible par 3. L'hérédité est vérifiée et pourtant la propriété n'est jamais vraie.

## Partie 2 : Limite finie ou infinie d'une suite

### 1) Limite infinie

#### Définition :

On dit que la suite  $(u_n)$  admet pour **limite**  $+\infty$ , si  $u_n$  est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang et on note :  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

#### Exemple :

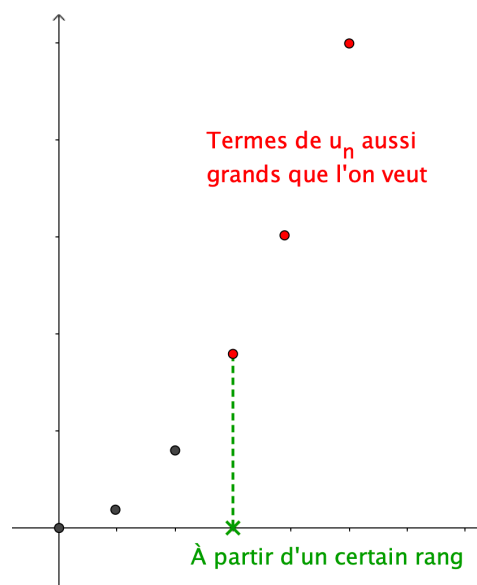
La suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n$  par  $u_n = n^2$  a pour limite  $+\infty$ .

On a par exemple :  $u_{100} = 100^2 = 10\,000$

$$u_{1\,000} = 1\,000^2 = 1\,000\,000$$

Les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on veut à partir d'un certain rang.

Si on prend un réel  $a$  quelconque, l'intervalle  $]a ; +\infty[$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

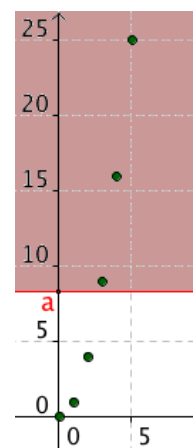


**Définitions :** - On dit que la suite  $(u_n)$  admet pour limite  $+\infty$  si tout intervalle  $]a ; +\infty[$ ,  $a$  réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

- On dit que la suite  $(u_n)$  admet pour limite  $-\infty$  si tout intervalle  $]-\infty ; b[$ ,  $b$  réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$



Algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un nombre réel  $A$  :

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$  et pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = 4u_n$ .

Cette suite est croissante et admet pour limite  $+\infty$ .

En appliquant l'algorithme ci-contre avec  $A = 100$ , on obtient en sortie  $n = 3$ .

A partir du terme  $u_3$ , les termes de la suite dépassent 100.

| Langage naturel                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------|
| Définir fonction seuil(A)                                                     |
| $n \leftarrow 0$<br>$u \leftarrow 2$                                          |
| Tant que $u < A$<br>$n \leftarrow n + 1$<br>$u \leftarrow 4u$<br>Fin Tant que |
| Afficher $n$                                                                  |

Le programme correspondant dans différents langages :

| TI                                                                                   | CASIO                                                                     | Python                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>PROGRAM:SEUIL :Input A :0→N :2→U :While U&lt;A :N+1→N :4×U→U :End :Disp N</pre> | <pre>=====SEUIL "A="?→A 0→N 2→U While U&lt;A N+1→N 4×U→U WhileEnd N</pre> | <pre>def seuil(a):     n=0     u=2     while u&lt;a:         n=n+1         u=4*u     return(n)</pre> |

## 2) Limite finie

### Définition :

On dit que la suite  $(u_n)$  admet pour **limite  $L$** , si  $u_n$  est aussi proche de  $L$  que l'on veut à partir d'un certain rang et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L.$$

Une telle suite est dite **convergente**.

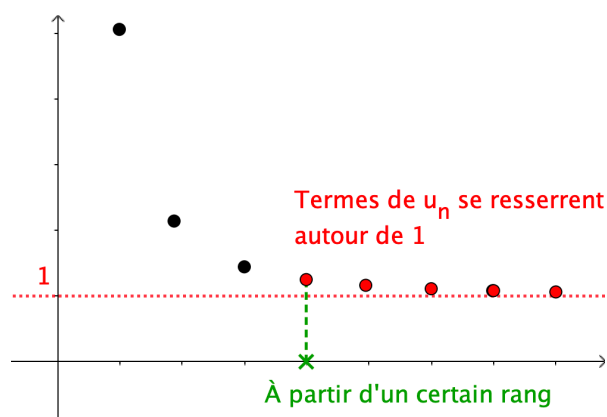
Exemple : La suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n$  non nul par  $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$  a pour limite 1.

On a par exemple :

$$u_{100} = 1 + \frac{1}{100^2} = 1,0001$$

$$u_{1\,000} = 1 + \frac{1}{1\,000^2} = 1,000001$$

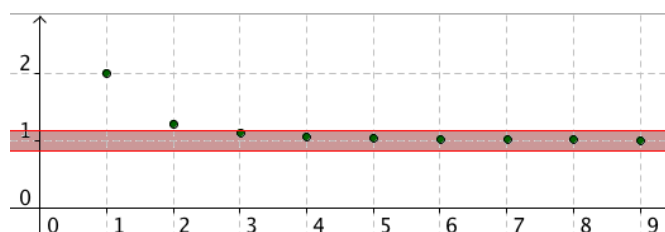
Les termes de la suite se resserrent autour de 1 à partir d'un certain rang.



Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 1, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.

Définition : On dit que la suite  $(u_n)$  admet pour limite  $L$  si tout intervalle ouvert contenant  $L$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L.$$



**Définition :** Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Remarque :

Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.

Par exemple, la suite de terme générale  $(-1)^n$  prend alternativement les valeurs  $-1$  et  $1$ .

Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie. Elle est donc divergente.

### 3) Limites des suites usuelles

Propriétés :

$$- \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

$$- \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Démonstration de :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Soit un intervalle quelconque ouvert  $] -a ; a[$ ,  $a$  réel positif non nul, contenant 0.

Pour tout  $n$ , tel que :  $n > \frac{1}{a}$ , on a :  $0 < \frac{1}{n} < a$  et donc  $\frac{1}{n} \in ] -a ; a[$

Ainsi, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle  $] -a ; a[$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ .

## Partie 3 : Opérations sur les limites

### 1) Utiliser les propriétés des opérations sur les limites

#### SOMME

|                                            |          |           |           |           |           |           |
|--------------------------------------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$       | $L$      | $L$       | $L$       | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$       | $L'$     | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n =$ | $L + L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | F.I.*     |

\* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

#### PRODUIT

$\infty$  désigne  $+\infty$  ou  $-\infty$

|                                          |        |          |          |          |
|------------------------------------------|--------|----------|----------|----------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$     | $L$    | $L$      | $\infty$ | 0        |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$     | $L'$   | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n =$ | $L L'$ | $\infty$ | $\infty$ | F.I.     |

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

**QUOTIENT** $\infty$  désigne  $+\infty$  ou  $-\infty$ 

|                                                  |                |            |          |          |          |      |
|--------------------------------------------------|----------------|------------|----------|----------|----------|------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$             | $L$            | $L \neq 0$ | $L$      | $\infty$ | $\infty$ | $0$  |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$             | $L' \neq 0$    | $0$        | $\infty$ | $L$      | $\infty$ | $0$  |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$ | $\frac{L}{L'}$ | $\infty$   | $0$      | $\infty$ | F.I.     | F.I. |

On applique la règle des signes pour déterminer si le quotient est  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

Tous ces résultats sont intuitifs. On retrouve par exemple, un principe sur les opérations de limite semblable à la règle des signes établie sur les nombres relatifs.

Méthode : Calculer la limite d'une suite à l'aide des formules d'opération



**Vidéo** <https://youtu.be/v7hD6s3thp8>

Calculer les limites : a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + n$     b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} + 1 \right) (n^2 + 3)$     c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{-n^2 - 3}$

**Correction**

a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + n = ?$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \end{cases}$$

D'après la propriété donnant la **limite d'une somme** :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + n = +\infty$

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} + 1 \right) (n^2 + 3) = ?$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} + 1 \right) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 3) = +\infty \end{cases}$$

D'après la propriété donnant la **limite d'un produit** :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} + 1 \right) \times (n^2 + 3) = +\infty$

c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{-n^2 - 3} = ?$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2 \leftarrow \text{Dans la pratique, on ne l'écrit pas, car évident !} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 - 3 = -\infty \end{cases}$$

D'après la propriété donnant la **limite d'un quotient** :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{-n^2 - 3} = 0$

**2) Cas des formes indéterminées**

Il est important de reconnaître les formes indéterminées pour lesquelles il faudra utiliser des calculs algébriques ou utiliser d'autres propriétés sur les calculs de limites afin de lever l'indétermination.

Les quatre **formes indéterminées** à reconnaître sont :

" $\infty - \infty$ ", " $0 \times \infty$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ " et " $\frac{0}{0}$ ".

Méthode : Lever une indétermination à l'aide d'une factorisation (1)

▶ Vidéo <https://youtu.be/RQhdU7-KLMA>

Déterminer les limites suivantes : a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n}$       b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1$

### Correction

a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n} = ?$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -3\sqrt{n} = -\infty \end{cases}$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

• Levons l'indétermination :

$$n - 3\sqrt{n} = n \left( 1 - \frac{3\sqrt{n}}{n} \right) = n \left( 1 - \frac{3(\sqrt{n})^2}{n\sqrt{n}} \right) = n \left( 1 - \frac{3}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{\sqrt{n}} = 1 \end{cases}$$

Donc, comme limite d'un produit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( 1 - \frac{3}{\sqrt{n}} \right) = +\infty$

Soit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n} = +\infty$

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1 = ?$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -5n + 1 = -\infty \end{cases}$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

• Levons l'indétermination en **factorisant par le monôme de plus haut degré** :

$$n^2 - 5n + 1 = n^2 \left( 1 - \frac{5n}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) = n^2 \left( 1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \end{cases}$$

Donc, comme limite d'une somme :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} = 1$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} = 1 \end{cases}$$

Donc, comme limite d'un produit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = +\infty$

Soit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1 = +\infty$ .

### Méthode : Lever une indétermination à l'aide de factorisations (2)

 Vidéo <https://youtu.be/wkMleHBnyqU>

 Vidéo <https://youtu.be/loytWsU4pdQ>

Déterminer les limites suivantes : a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n}$  b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2+n}{n+3}$

### Correction

a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n} = ?$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 5n^2 + 4 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^2 + 3n = +\infty \end{cases}$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

• Levons l'indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré :

$$\frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n} = \frac{n^2}{n^2} \times \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3n}{n^2}} = \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}}$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^2} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 5 + \frac{4}{n^2} = 5 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + \frac{3}{n} = 4 \end{cases} \quad \text{comme limites de sommes}$$

Donc, comme limite d'un quotient :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}} = \frac{5}{4}$ .

Et donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n} = \frac{5}{4}$ .

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2+n}{n+3} = ?$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^2 + n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n + 3 = +\infty \end{cases}$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

• Levons l'indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré :

$$\frac{3n^2 + n}{n + 3} = \frac{n^2}{n} \times \frac{3 + \frac{n}{n^2}}{1 + \frac{3}{n}} = n \times \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}}$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{n} = 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{n} = 1 \end{cases} \quad \text{comme limites de sommes}$$

Donc, comme limite d'un quotient :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = \frac{3}{1} = 3.$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty. \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = 3 \end{cases}$$

Donc, comme limite d'un produit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \times \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = +\infty.$

Soit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + n}{n + 3} = +\infty.$

Méthode : Lever une indétermination à l'aide de l'expression conjuguée

 Vidéo <https://youtu.be/9fEHRHdbnwQ>

Déterminer la limite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

**Correction**

$$\bullet \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \end{cases}$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

• Levons l'indétermination par la méthode de l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(\sqrt{n+2})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}
 \end{aligned}$$

• Or, comme limite d'une somme :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n} = +\infty$

Et donc, comme limite d'un quotient :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = 0$ .

Soit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = 0$ .

# LES SUITES – Chapitre 2/2

▶ Tout le cours en vidéo : [https://youtu.be/MJv7\\_pkFcdA](https://youtu.be/MJv7_pkFcdA)

## Partie 1 : Limites et comparaison

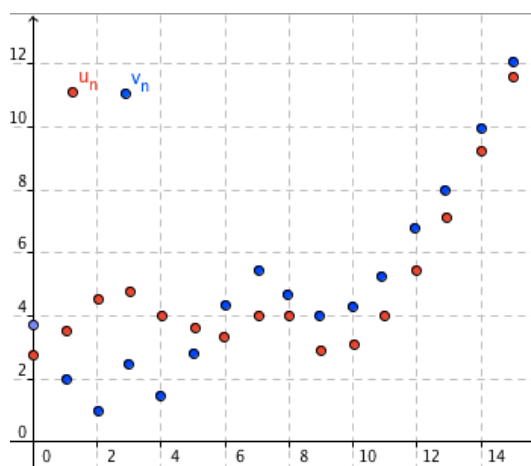
### 1) Théorèmes de comparaison

#### Théorème 1 :

Soit deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

Si, à partir d'un certain rang, on a  $\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \end{cases}$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

Par abus de langage, on pourrait dire que la suite  $(u_n)$  pousse la suite  $(v_n)$  vers  $+\infty$  à partir d'un certain rang.



#### Démonstration au programme :

▶ Vidéo <https://youtu.be/qIBlhdoFYFI>

Soit un nombre réel  $a$ .

-  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , donc l'intervalle  $]a ; +\infty[$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note  $n_1$ .

On a donc pour tout  $n \geq n_1$ ,  $a < u_n$ .

- A partir d'un certain rang, que l'on note  $n_2$ , on a  $u_n \leq v_n$ .

- Ainsi pour tout  $n \geq \max(n_1 ; n_2)$ , on a :  $a < u_n \leq v_n$ .

On en déduit que l'intervalle  $]a ; +\infty[$  contient tous les termes de la suite  $(v_n)$  à partir du rang  $\max(n_1 ; n_2)$ .

Et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

#### Théorème 2 :

Soit deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

Si, à partir d'un certain rang, on a :  $\begin{cases} u_n \geq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \end{cases}$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ .

### Méthode : Déterminer une limite par comparaison

📺 Vidéo <https://youtu.be/iQhh46LupN4>

Déterminer la limite suivante :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + (-1)^n$

#### Correction

On a :

$$(-1)^n \geq -1 \text{ donc :}$$

$$n^2 + (-1)^n \geq n^2 - 1$$

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 1 = +\infty$ , donc par comparaison,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + (-1)^n = +\infty$ .

#### 2) Théorème d'encadrement

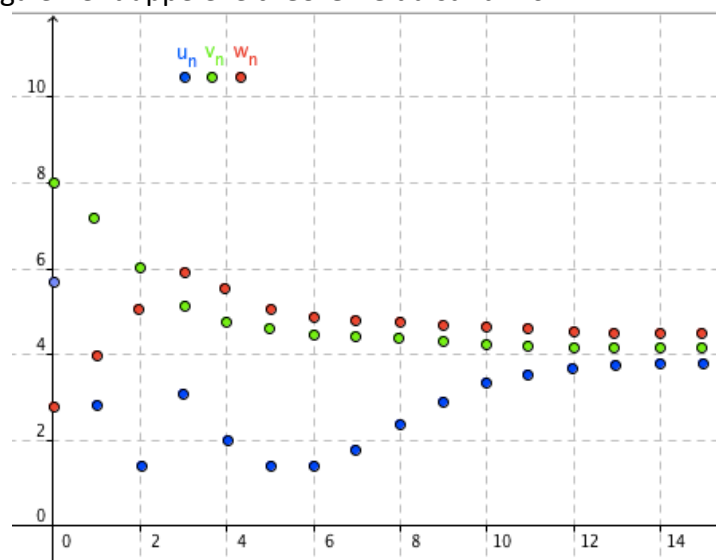
##### Théorème des gendarmes :

Soit trois suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$ .

Si, à partir d'un certain rang, on a : 
$$\begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L \end{cases} \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L.$$

Par abus de langage, on pourrait dire que les suites  $(u_n)$  et  $(w_n)$  (les gendarmes) se resserrent autour de la suite  $(v_n)$  à partir d'un certain rang pour la faire converger vers la même limite.

Ce théorème est également appelé le **théorème du sandwich**.



##### Démonstration :

Soit un intervalle ouvert  $I$  contenant  $L$ .

-  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ , donc l'intervalle  $I$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note  $n_1$ .

-  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$ , donc l'intervalle  $I$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note  $n_2$ .

- A partir d'un certain rang, que l'on note  $n_3$ , on a  $u_n \leq v_n \leq w_n$ .  
 - Ainsi pour tout  $n \geq \max(n_1; n_2; n_3)$ , l'intervalle  $I$  contient tous les termes de la suite  $(v_n)$ .  
 Et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$ .

### Méthode : Déterminer une limite par encadrement

 Vidéo [https://youtu.be/OdzYjz\\_vQbw](https://youtu.be/OdzYjz_vQbw)

Déterminer la limite suivante :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin(n)}{n}$

#### Correction

On a :  $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ , donc :

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Or :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  donc d'après le théorème des gendarmes :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$

Et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin(n)}{n} = 1$ .

Remarque : On utilise le théorème de comparaison pour démontrer une limite infinie et le théorème d'encadrement pour une limite finie.

## Partie 2 : Suites majorées, minorées, bornées

### 1) Définitions :

#### Définitions :

- La suite  $(u_n)$  est **majorée** s'il existe un réel  $M$  tel que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \leq M$ .
- La suite  $(u_n)$  est **minorée** s'il existe un réel  $m$  tel que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \geq m$ .
- La suite  $(u_n)$  est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

#### Exemples :

- Les suites de terme général  $\cos(n)$  ou  $(-1)^n$  sont bornées car minorées par  $-1$  et majorées par  $1$ .
- La suite de terme général  $n^2$  est minorée par  $0$ . Mais elle n'est pas majorée.

### Méthode : Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée

 Vidéo [https://youtu.be/F1u\\_BVwiW8E](https://youtu.be/F1u_BVwiW8E)

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$  et  $u_0 = 2$ .  
 Démontrer par récurrence que la suite  $(u_n)$  est majorée par  $3$ .

## Correction

- **Initialisation :**

$$u_0 = 2 < 3$$

La propriété est donc vraie pour  $n = 0$ .

- **Hérédité :**

- Hypothèse de récurrence :

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier  $k : u_k < 3$ .

- Démontrons que : la propriété est vraie au rang  $k + 1 : u_{k+1} < 3$ .

On a :  $u_k < 3$

Donc :  $\frac{1}{3}u_k < \frac{1}{3} \times 3$

$$\frac{1}{3}u_k + 2 < \frac{1}{3} \times 3 + 2$$

Soit :  $u_{k+1} < 3$

- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour  $n = 0$  et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel  $n$ , soit :  $u_n < 3$ . Donc  $(u_n)$  est majorée.

## 2) Convergence des suites monotones

**Propriété :** Si une suite est croissante et admet pour limite  $L$ , alors elle est majorée par  $L$ .

### Démonstration par l'absurde :

Démontrons par l'absurde en supposant le contraire, soit : « Il existe un rang  $p$ , tel que  $u_p > L$ . »

- L'intervalle ouvert  $]L - 1 ; u_p[$  contient  $L$ .

Or, par hypothèse,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ . Donc l'intervalle  $]L - 1 ; u_p[$  contient tous les termes de la suite  $(u_n)$  à partir d'un certain rang (1).

- Comme  $(u_n)$  est croissante :  $u_n \geq u_p$  pour  $n > p$ .

Donc si  $n > p$ , alors  $u_n \notin ]L - 1 ; u_p[$  (2).

(1) et (2) sont contradictoires, on en déduit qu'il n'existe pas  $p \in \mathbb{N}$ , tel que  $u_p > L$ .

Et donc la suite  $(u_n)$  est majorée par  $L$ .

### Théorème de convergence monotone :

- Si une suite est croissante et majorée alors elle est convergente.

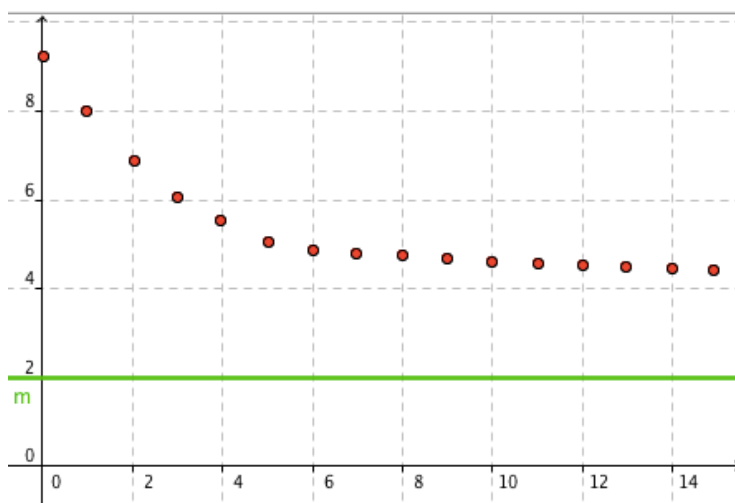
- Si une suite est décroissante et minorée alors elle est convergente.

- Admis -

### Remarque :

Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.

Dans l'exemple ci-dessous, la suite est décroissante et minorée par 2. Cela prouve que la limite de la suite est supérieure à 2 mais n'est pas nécessairement égale à 2. Elle peut être égale à 4 !



**Méthode :** Utiliser le théorème de convergence monotone

📺 Vidéo <https://youtu.be/gO-MQUIBAfo>

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$  et  $u_0 = 2$ .  
Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.

### Correction

On a démontré dans le chapitre « LES SUITES – Chapitre 1/2 Partie 1 » que la suite  $(u_n)$  est croissante.

On a démontré dans la méthode précédente que la suite  $(u_n)$  est majorée par 3.

La suite  $(u_n)$  est donc croissante et majorée, d'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que la suite  $(u_n)$  est convergente.

### Corollaire :

- 1) Si une suite est croissante et non majorée alors elle tend vers  $+\infty$ .
- 2) Si une suite est décroissante et non minorée alors elle tend vers  $-\infty$ .

### Démonstration (du 1) au programme :

📺 Vidéo <https://youtu.be/rttQIYOKCRQ>

Soit un réel  $a$ .

Comme  $(u_n)$  n'est pas majorée, il existe un entier  $p$  tel que  $u_p > a$ .

La suite  $(u_n)$  est croissante donc pour tout  $n > p$ , on a :  $u_n \geq u_p$ .

Donc pour tout  $n > p$ , on a :  $u_n > a$ .

Et donc à partir d'un certain rang  $p$ , tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle  $]a ; +\infty[$ .

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

## Partie 3 : Comportement à l'infini d'une suite géométrique

### 1) Rappel

**Propriété :** Soit  $(u_n)$  une **suite géométrique** de raison  $q$  et de premier terme  $u_0$ .

Alors, pour tout entier  $n$ , on a :

- $u_{n+1} = q \times u_n$  (forme de récurrence)
- $u_n = u_0 \times q^n$  (forme explicite).

**Exemple :** Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $-3$  et de premier terme  $5$ .

On a :  $u_{n+1} = -3u_n$  et  $u_n = 5 \times (-3)^n$ .

### 2) Limites

| $q$                                | $q \leq -1$   | $-1 < q < 1$ | $q = 1$ | $q > 1$   |
|------------------------------------|---------------|--------------|---------|-----------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ | Pas de limite | 0            | 1       | $+\infty$ |

**Démonstration au programme dans le cas  $q > 1$  :**

 **Vidéo** [https://youtu.be/aSBGk\\_GEEew](https://youtu.be/aSBGk_GEEew)

**Prérequis :** Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $(1 + a)^n \geq 1 + na$  (inégalité de Bernoulli), démontrée dans le chapitre « LES SUITES (Partie 1) Paragraphe I. ».

On suppose que  $q > 1$ , alors on peut poser  $q = a + 1$  avec  $a > 0$ .

$q^n = (1 + a)^n \geq 1 + na$ , d'après l'inégalité de Bernoulli.

Or  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + na = +\infty$  car  $a > 0$ .

Donc d'après le théorème de comparaison :  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$ .

**Exemple :** La suite de terme général  $-5 \times 4^n$  a pour limite  $-\infty$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty$ .

**Méthode :** Étudier un phénomène modélisable par une suite

 **Vidéo** <https://youtu.be/6-vFnQ6TghM>

 **Vidéo** [https://youtu.be/0CNT\\_fUuwEY](https://youtu.be/0CNT_fUuwEY)

Un investisseur dépose 5 000 € sur un compte rémunéré à 3 % par an. Chaque année suivante, il dépose 300 € de plus sur ce compte.

On note  $(u_n)$  la somme épargnée à l'année  $n$ .

On a alors :  $u_{n+1} = 1,03u_n + 300$  et  $u_0 = 5\,000$ .

1) Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

2) Prouver que la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier  $n$  par  $v_n = u_n + 10\,000$  est géométrique et donner sa raison et son premier terme.

3) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

4) En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ . Puis calculer  $u$ .

5) Étudier les variations de  $(u_n)$ .

**Correction**

$$1) u_1 = 1,03u_0 + 300 = 5\,450$$

$$u_2 = 1,03u_1 + 300 = 5\,913,5$$

$$2) v_{n+1} = u_{n+1} + 10\,000$$

$$= 1,03u_n + 300 + 10\,000$$

$$= 1,03u_n + 10\,300$$

$$= 1,03(v_n - 10\,000) + 10\,300, \text{ car } v_n = u_n + 10\,000$$

$$= 1,03v_n - 10\,300 + 10\,300$$

$$= 1,03v_n$$

Donc  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme

$$v_0 = u_0 + 10\,000 = 5\,000 + 10\,000 = 15\,000.$$

$$3) \text{ Pour tout } n, \text{ on a : } v_n = 15\,000 \times 1,03^n.$$

$$4) u_n = v_n - 10\,000 = 15\,000 \times 1,03^n - 10\,000$$

$$\text{On a alors : } u_{10} = 15\,000 \times 1,03^{10} - 10\,000 \approx 10\,158,75$$

$$5) u_{n+1} - u_n = 15\,000 \times 1,03^{n+1} - 10\,000 - (15\,000 \times 1,03^n - 10\,000)$$

$$= 15\,000 \times (1,03^{n+1} - 1,03^n)$$

$$= 15\,000 \times 1,03^n \times (1,03 - 1)$$

$$= 450 \times 1,03^n > 0$$

Donc la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

### 3) Somme des termes d'une suite géométrique

**Propriété :**  $n$  est un entier naturel non nul et  $q$  un réel différent de 1 alors on a :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**Méthode :** Utiliser la limite d'une suite géométrique

 **Vidéo** <https://youtu.be/XTftGHfnYMw>

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-2)^n}{3}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - 3^n$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

**Correction**

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-2)^n}{3} = ?$$

$((-2)^n)$  est une suite géométrique de raison  $-2$  strictement inférieure à  $-1$ .

Donc  $((-2)^n)$  ne possède pas de limite.

Et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-2)^n}{3}$  n'existe pas.

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - 3^n = ?$

- $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty \end{cases}$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

• Levons l'indétermination :

$$2^n - 3^n = 3^n \left( \frac{2^n}{3^n} - 1 \right) = 3^n \left( \left( \frac{2}{3} \right)^n - 1 \right)$$

• Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{3} \right)^n = 0$ , comme limite d'une suite géométrique de raison  $\frac{2}{3}$  avec  $-1 < \frac{2}{3} < 1$ .

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{3} \right)^n - 1 = -1$ .

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ , comme limite d'une suite géométrique de raison  $3 > 1$ .

Donc, comme limite d'un produit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \left( \left( \frac{2}{3} \right)^n - 1 \right) = -\infty$

Soit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - 3^n = -\infty$ .

c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \right)^3 + \dots + \left( \frac{1}{2} \right)^n$

On reconnaît la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme 1. Donc :

$$1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \right)^3 + \dots + \left( \frac{1}{2} \right)^n = \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} = 0$ , comme limite d'une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  avec  $-1 < \frac{1}{2} < 1$ .

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} = 1$ .

Et donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) = 2$ .

Soit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \right)^3 + \dots + \left( \frac{1}{2} \right)^n = 2$ .