

Série corrigée

**Primitives d'une
fonction**

**Deuxième bac science
expérimentale**

:

:

Série d'exercices 05 : Primitives d'une fonction**2 Bac BIOF****Exercice 01**

1) Déterminer les fonctions primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x^2 - 2$

2) Déterminer la fonction primitive G qui vérifie $G(1) = 2$

Exercice 02

Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I .

1) $f(x) = x^3 - 2x$ sur $I = \mathbb{R}$;

2) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$

3) $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)$;

4) $f(x) = \frac{2x^3 + x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$ sur $I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \sqrt{x}$; sur $I = \mathbb{R}^+$;

6) $f(x) = \cos(x) \sin^2(x)$; sur $I = \mathbb{R}$

7) $f(x) = \cos^3(x)$, sur $I = \mathbb{R}$;

8) $f(x) = \frac{x}{(x+2)^4}$ sur $I =]-2; +\infty[$

9) $f(x) = x(x+2)^6$; sur $I = \mathbb{R}$;

Exercice 03

f la fonction numérique définie sur $I =]1; +\infty[$ par:

$$f(x) = \frac{2x + 5}{(x - 1)^3}$$

1) Déterminer les réels a et b tels que:

$$f(x) = \frac{a}{(x - 1)^2} + \frac{b}{(x - 1)^3}$$

2) En déduire la primitive F de la fonction f qui s'annule en 2

Exercice 04

Dans chacun des cas suivants, Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I

a) $f(x) = (2x + 1)(x^2 + x + 1)^2$ et $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = (3x^2 + 1)\sqrt{x^3 + x + 3}$ et $I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x-3)^4}$ et $I =]-1; 3[$

d) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$ et $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$

e) $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x+1}$ et $I =]0; +\infty[$

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \sqrt[3]{x-1}$ et $I =]1; +\infty[$

g) $f(x) = \sin\left(3x - \frac{7\pi}{6}\right) + \cos(5x) - 1$ et $I = \mathbb{R}$

h) $f(x) = (2x + 1)\sqrt[5]{x^2 + x + 1}$ et $I = \mathbb{R}$

Exercice 05

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I =]1; +\infty[$ par:

$$f(x) = \frac{x^5 - 2x^3 + 5x}{(x^2 - 1)^2}$$

a- Justifier que la fonction f admet une fonction primitive définie sur l'intervalle I

b- Vérifier que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = x + \frac{1}{(x - 1)^2} - \frac{1}{(x + 1)^2}$$

c- En déduire les fonctions primitives de la fonction f sur l'intervalle I .

d- Déterminer la primitive F de la fonction f qui s'annule en 2.

Exercice 01

1) Déterminer les fonctions primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x^2 - 2$

2) Déterminer la fonction primitive G qui vérifie $G(1) = 2$

Solution

1) Toute fonction de la forme $F_c(x) = x^3 - 2x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$,
Sont des primitives de f .

Car $\forall x \in \mathbb{R}: F'_c(x) = 3x^2 - 2 = f(x)$

2) $G(1) = 2$ et G est une primitive de $f \Rightarrow 1^3 - 2 \times 1 + C = 2$
 $\Rightarrow C = 3$
 $\Rightarrow G(x) = x^3 - 2x + 3$

Exercice 2

Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I .

1) $f(x) = x^3 - 2x$ sur $I = \mathbb{R}$; 2) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$ sur $I =]0 ; +\infty[$

3) $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)$; 4) $f(x) = \frac{2x^3 + x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$ sur $I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \sqrt{x}$; sur $I = \mathbb{R}^+$; 6) $f(x) = \cos(x) \sin^2(x)$; sur $I = \mathbb{R}$

7) $f(x) = \cos^3(x)$, sur $I = \mathbb{R}$; 8) $f(x) = \frac{x}{(x+2)^4}$ sur $I =]-2 ; +\infty[$

9) $f(x) = x(x+2)^6$; sur $I = \mathbb{R}$

Solution

1) $f(x) = x^3 - 2x$;

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R},$$

2) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = 3x^2 - 3 \times \frac{1}{x^2}$

Donc $F(x) = x^3 - 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) + C = x^3 + \frac{3}{x} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$,

3) $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)$

de type $u'u$ avec $u(x) = x^2 - 5x + 4 \rightarrow u'(x) = 2x - 5$

Une primitive de $u'u$ est de la forme $\frac{1}{2}u^2$

Donc $F(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 5x + 4)^2 + C$, avec $C \in \mathbb{R}$,

4) $f(x) = \frac{2x^3 + x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} = \frac{1}{2} \times \frac{4x^3 + 2x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$ de type $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

avec $u(x) = x^4 + x^2 + 1 \rightarrow u'(x) = 4x^3 + 2x$

Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est de la forme $2\sqrt{u}$

$F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + C = \sqrt{x^4 + x^2 + 1} + C$. avec $C \in \mathbb{R}$,

5) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ d

Donc $F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

6) $f(x) = \cos(x) \sin^2(x)$

de type $u'u^2$ avec $u(x) = \sin(x) \rightarrow u'(x) = \cos x$

Une primitive de $u'u^2$ est de la forme $\frac{1}{3}u^3$.

D'où $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$

7) $f(x) = \cos^3(x) = \cos(x)\cos^2(x)$

$$= \cos(x)(1 - \sin^2 x)$$

$$= \cos x - \cos x \sin^2 x$$

Une primitive de $u'u^2$ est de la forme $\frac{1}{3}u^3$.

D'où $F(x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$

8) $f(x) = \frac{x}{(x+2)^4}$ sur $I =]-2; +\infty[$

$$f(x) = \frac{x}{(x+2)^4} = \frac{x+2}{(x+2)^4} - \frac{2}{(x+2)^4} = \frac{1}{(x+2)^3} - \frac{2}{(x+2)^4}$$

$$f(x) = (x+2)^{-3} - 2(x+2)^{-4}$$

Une primitive de u^n est de la forme $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$

$$F(x) = \frac{1}{-2}(x+2)^{-2} - 2 \times \frac{1}{-2}(x+2)^{-3} + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R},$$

$$F(x) = -\frac{1}{2(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)^3} + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R},$$

9) $f(x) = x(x+2)^6$

$$= [(x+2) - 2](x+2)^6$$

$$= (x+2)^7 - 2(x+2)^6$$

$$F(x) = \frac{1}{8}(x+2)^8 - \frac{2}{7}(x+2)^7 + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R},$$

Exercice 05

Soit la fonction f définie sur $I =]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^5 - 2x^3 + 5x}{(x^2 - 1)^2}$

1) Justifier que f admet une fonction primitive définie sur I

2) Vérifier que pour tout $x \in I : f(x) = x + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$

3) En déduire les fonctions primitives de la fonction f sur I .

4) Déterminer la primitive F de la fonction f qui s'annule en 2.

Correction de l'exercice 05

Soit la fonction f définie sur $I =]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^5 - 2x^3 + 5x}{(x^2 - 1)^2}$

1) Justifier que la fonction f admet une fonction primitive définie sur I

La fonction $x \mapsto \frac{x^5 - 2x^3 + 5x}{(x^2 - 1)^2}$ est une fonction rationnelle donc elle est

continue sur

$] -\infty; 1[\cup]1; +\infty[$, donc f est continue sur $I =]1; +\infty[$

D'où la fonction f admet une fonction primitive définie sur I

2) Vérifier que pour tout $x \in I : f(x) = x + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$

$$x + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x-1)^2(x+1)^2 + (x+1)^2 - (x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$= \frac{x(x^2-1)^2 + x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$= \frac{x(x^4 - 2x^2 + 1) + 4x}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{x^5 - 2x^3 + x + 4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^5 - 2x^3 + 5x}{(x-1)^2(x+1)^2} = f(x)$$

3) En déduire les fonctions primitives de la fonction f sur l'intervalle I .

$$f(x) = x + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = x + (x-1)^{-2} - (x+1)^{-2}$$

Donc les fonctions primitives de la fonction f sur I sont

$$F_C(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} - \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C; \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc : } F_C(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + C; \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

4) Déterminer la primitive F de la fonction f qui s'annule en 2.

On a F la primitive de la fonction f qui s'annule en 2.

$$\text{Donc } F(2) = 0$$

$$\text{Donc } \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2-1} + \frac{1}{2+1} + C = 0$$

$$\text{Donc } 2 - 1 + \frac{1}{3} + C = 0$$

$$\text{Donc } C = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Donc : } F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{4}{3}$$