

Résumé

Fonction logarithme népérien

Deuxième bac science
expérimentale

Définition du fonction logarithme népérien

- La primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée fonction logarithme népérien on la note par **ln**
- La fonction ln est défini et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et **$\ln(1) = 0$**
- Pour tout x de $]0, +\infty[$: **$\ln'(x) = \frac{1}{x}$**
- On a ; **$\ln(e) = 1$** avec le nombre **e** est un nombre irrationnel ; $e \cong 2,7$

Propriétés algébrique le la fonction ln

- $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$; $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln(x^r) = r \ln(x)$; $r \in \mathbb{Q}$

Equations et inéquations

- $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$**
- $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$**
- $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$**
- $\ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$**

Limites de la fonction ln

- FI:** $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$; $+\infty - (+\infty)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$**
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0^-$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$**
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0$**
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$**

Exemple de méthode de changement de variable pour calcul des limites

Calculons la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

On pose $t = \sqrt{x}$ donc $t^2 = x$
 et on a $x \rightarrow +\infty$ donc $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t^2)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(t)}{t}$$

$$= 2 \times 0 = 0 \quad (\text{car } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0)$$

Etude de La fonction logarithme népérien

1) **Domaine de définition** est $D_{\ln} =]0, +\infty[$

2) **Le sens des variations de la fonction ln**

On a pour tout x de $]0, +\infty[$: **$\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$**

Donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

3) **Le signe de la fonction ln sur $]0, +\infty[$**

➤ Sur l'intervalle $[1, +\infty[$

On a ln est str croissante sur $[1, +\infty[$ donc
 $x \geq 1 \Leftrightarrow \ln(x) \geq \ln(1)$
 $\Leftrightarrow \ln(x) \geq 0$

➤ Sur l'intervalle $]0, 1]$

On a ln est str croissante sur $]0, 1]$ donc
 $0 < x \leq 1 \Leftrightarrow \ln(x) \leq \ln(1)$
 $\Leftrightarrow \ln(x) \leq 0$

Conclusion : (le tableau de signe de ln)

x	0	1	$+\infty$
ln(x)		0	+

- $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$**
- $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$**
- $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$**

4) **Equation de la tangente de (Cf) en 1**

$$(T): y = \ln'(1)(x - 1) + \ln(1)$$

$$(T): y = x - 1$$

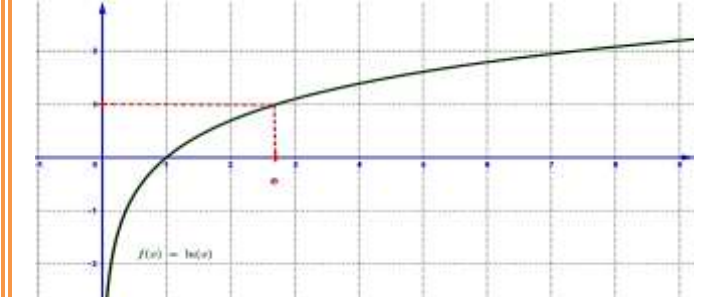
5) **Les branches infinies de la courbe (Cf)**

On a **$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$** , donc la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est un **asymptote verticale** à (Cf)

On a **$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$** et **$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$**

Donc (Cf) admet une **branche parabolique** de direction **l'axe des abscisses (Ox)** au voisinage de $+\infty$

6) **La courbe de la fonction ln**



Dérivée de la fonction ln(U) avec $U \neq 0$

Si U est dérivable sur I alors **ln(U) est dérivable sur I et on a ; $\ln'(|U(x)|) = \frac{U'(x)}{U(x)}$**

Primitives

➤ **Les primitives de la fonction $x \rightarrow \frac{U'(x)}{U(x)}$**

sur I sont les fonctions :
 $x \rightarrow \ln(|U(x)|) + c$; $c \in \mathbb{R}$

➤ **Les primitives de la fonction $x \rightarrow x^r$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \rightarrow \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$**
avec ; $c \in \mathbb{R}$ avec $r \in \mathbb{Q} / -1$

➤ **Les primitives de la fonction $x \rightarrow U'(x) \times U(x)^r$ sur I sont les fonctions :**
 $x \rightarrow \frac{U^{r+1}}{r+1} + c$; $c \in \mathbb{R}$

Préparation au devoir 3

Deuxième bac sciences PC/SVT/ST

- **Fiche 1** : Etude des fonctions logarithme népérien
- **Fiche 2** : Etude des fonctions ; Dérivabilité et continuité
- **Fiche 3** : Branches infinies

1) Fonction logarithme népérien

- La primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée fonction logarithme népérien on la note par $\ln$
- La fonction $\ln$ est définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et $\ln(1) = 0$
- Pour tout x de $]0, +\infty[$: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
- On a ; $\ln(e) = 1$ avec le nombre e est un nombre irrationnel ; $e \cong 2,7$

2) Propriétés algébriques de la fonction $\ln$

- $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$; $x, y \in]0, +\infty[$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$; $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln(x^r) = r \ln(x)$; $r \in \mathbb{Q}$

3) Equations et inéquations

- $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$; $x, y \in]0, +\infty[$
- $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$
- $\ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$ avec $a \in \mathbb{R}$

4) Limites de la fonction $\ln$

- $FI: \frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$; $+\infty - (+\infty)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0^-$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Exemple de méthode de changement de variable pour calcul des limites

Calculons la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

On pose $t = \sqrt{x}$ donc $t^2 = x$

Et on a $x \rightarrow +\infty$ donc $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t^2)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(t)}{t} = 2 \times 0 = 0$$

(car $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$)

5) Dérivée de la fonction $\ln(U)$ avec $U \neq 0$

Si U est dérivable sur I alors $\ln(|U|)$ est

dérivable sur I et on a ; $\ln'(|U(x)|) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

Primitives

Les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{U'(x)}{U(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln(|U(x)|) + c$; $c \in \mathbb{R}$

Etude de La fonction logarithme népérien

1) **Domaine de définition** est $D_{\ln} =]0, +\infty[$

2) **Le sens des variations de la fonction $\ln$**

On a pour tout x de $]0, +\infty[$: $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$

Donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

3) **Le signe de la fonction $\ln$ sur $]0, +\infty[$**

On a $\ln(1) = 0$

➤ Sur l'intervalle $[1, +\infty[$

On a $\ln$ est str croissante sur $[1, +\infty[$ donc

$$x \geq 1 \Leftrightarrow \ln(x) \geq \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \geq 0$$

➤ Sur l'intervalle $]0, 1]$

On a $\ln$ est str croissante sur $]0, 1]$ donc

$$0 < x \leq 1 \Leftrightarrow \ln(x) \leq \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq 0$$

Conclusion : (le tableau de signe de $\ln$)

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$		0	+

➤ $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

➤ $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

➤ $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

4) **Equation de la tangente de (Cf) en 1**

$$(T): y = \ln'(1)(x - 1) + \ln(1)$$

$$(T): y = x - 1$$

5) **Les branches infinies de la courbe (Cf)**

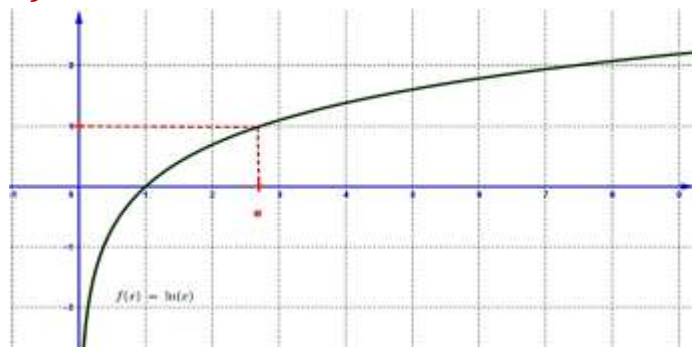
On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc la droite

d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est un asymptote verticale à (Cf)

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

Donc (Cf) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses (Ox) au voisinage de $+\infty$

6) **La courbe de la fonction $\ln$**



1) Continuité d'une fonction : $a \in D_f$

- f est continue en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- f est continue à droite de $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
- f est continue à gauche de $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$
- La fonction f est continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à droite de a et à gauche de a

Continuité sur un intervalle I

- Les polynômes sont continus sur $\mathbb{R}$
- Les fcts rationnelles sont continuées sur D_f
- La somme ; le produit de deux fonctions continues sur I est continue sur I
- La fonction $\frac{u}{v}$ est continue sur l'intervalle I ssi u et v est continue sur I et $v \neq 0$
- Si u est continue et positive sur I alors $\sqrt{u}$ est continue sur I

2) Dérivabilité d'une fonction en $a \in D_f$

- f dérivable en $a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$
- Interprétation géométrique :**
(C_f) admet une tangente au point $A(a; f(a))$
d'équation (T): $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

- $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en a

Interprétation géométrique :

(C_f) admet une demi tangente verticale au point $A(a; f(a))$ dirigée vers le haut

Fonctions dérivées des fonctions usuelles

- Les polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :
 $(ax + b)' = a$; $(a x^n)' = a n x^{n-1}$
- Si u dérivable alors $(u^n)' = n u^{n-1} u'$
 $\left(\frac{a}{x}\right)' = \frac{-a}{x^2}$; $x \neq 0$; $\left(\frac{a}{u}\right)' = \frac{-a u'}{u^2}$; $u \neq 0$
 $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $x > 0$; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$; $u > 0$
- u et v deux fonctions dérivables sur I alors
 $(u + v)' = u' + v'$; $(au)' = a u'$
 $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u v'}{(v)^2}$; $v \neq 0$
- Les fonction $\sin$; $\cos$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$
 $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$; $(f(U))' = U' f'(U)$

Lien entre la dérivabilité et la continuité

f dérivable sur $I \Rightarrow f$ est continue sur I

3) T.V.I et Fonction réciproque

- Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$ Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]a; b[$
- Si f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I ,

Alors la fonction f admet une fonction réciproque, notée f^{-1} , définit sur $J = f(I)$

$$\text{Par la relation } \begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

*Les courbes de f et de f^{-1} sont **symétriques** par rapport la droite **d'équation $y=x$**

Dérivabilité de f^{-1} en b avec $b = f(a)$

Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

4)Convexité de (C_f)et les Points d'inflexions

- Si $f'' \geq 0$ sur I alors (C_f) est *convexe* $\cup$
- Si $f'' \leq 0$ sur I alors (C_f) est *concave* $\cap$
- Si f'' s'anulle et change le signe en a alors $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion

5) POSITION RELATIVE de (C_f) et (Δ)

Pour étudier la position relative de (C_f) est la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$

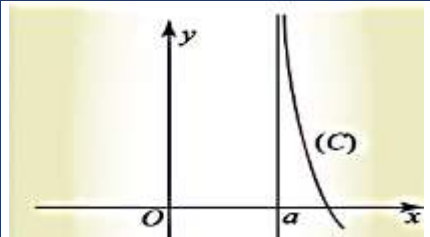
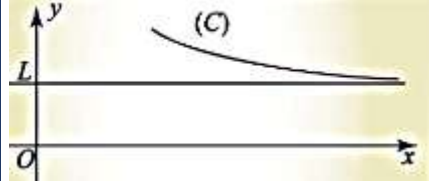
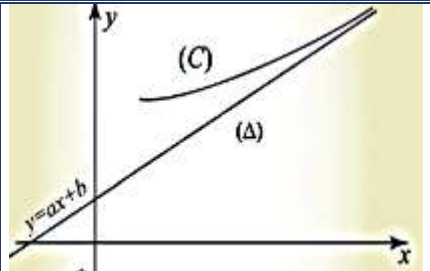
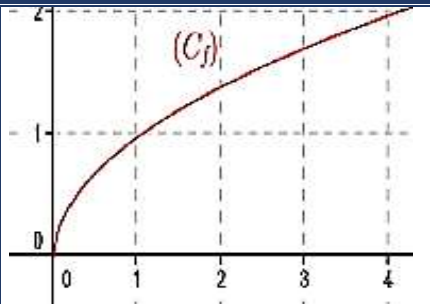
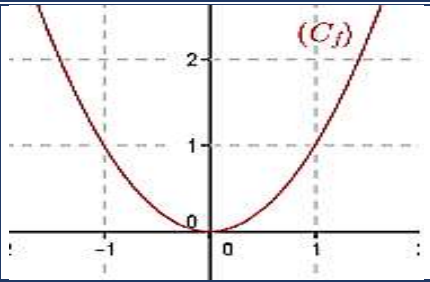
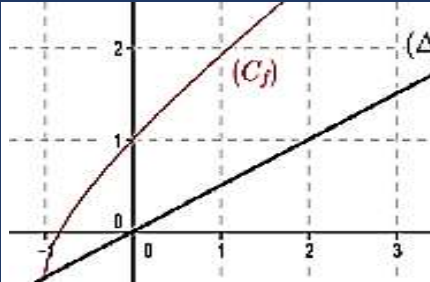
On étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$

- Si $f(x) - (ax + b) \geq 0$ alors la courbe (C_f) est au dessus de (Δ)
- Si $f(x) - (ax + b) \leq 0$ alors la courbe (C_f) est au dessous de (Δ)

6) Les éléments de symétrie de (C_f)

- La droite d'équation (Δ) : $x = a$ est un axe de symétrie de (C_f) si pour tout $x \in D_f$
 $(2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$
- La fonction f est **paire** ssi $\forall x \in D_f$:
 $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$
(Oy) est un axe de symétrie de (C_f)
- Le point $A(a; b)$ est centre de symétrie de (C_f) ssi pour tout $x \in D_f$:
 $(2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$
- La fonction est **impaire** ssi $\forall x \in D_f$:
 $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$

Le point O est centre de symétrie de (C_f)

La limite	Interprétation géométrique	Schématisation du résultat
Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$	Alors la droite (D) d'équation $x = a$ est asymptote verticale à (C_f)	
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$	Alors la droite (D) : $y = L$ est asymptote horizontale à (C_f) voisinage de $+\infty$	
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$	Alors droite $(\Delta): y = ax + b$ est asymptote oblique à (C_f) voisinage de $+\infty$	
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$, On calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$		
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	Alors (C_f) admet une branche parabolique de Direction la droite (O_x) Au voisinage de $+\infty$	
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$	Alors (C_f) admet une branche parabolique de Direction (O_y) Au voisinage de $+\infty$	
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, (avec $a \neq 0$) On calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax$		
Si : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \infty$	Alors (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $(\Delta): y = ax$ au voisinage de $+\infty$	
Si : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b$	Alors la droite d'équation $(\Delta): y = ax + b$ est asymptote oblique à (C_f) voisinage de $+\infty$	