

Série corrigé 1 : Logarithme Népérien : Equations -inéquations-Etude de signe

Logarithme népérien 1
Deuxième bac sciences
PC/SVT/ST

Fonction Logarithme
népérien : Equation-
Inéquations- Signe

Série corrigée de base1 :
Equation-Inéquations- Signe

2 Bac sciences
PC/SVT/ST
Logarithme

Rappel 1 :

- $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$
- $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$; $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln(x^r) = r \ln(x)$; $r \in \mathbb{Q}$

Exercice 01

1) Calculer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ les expressions suivantes :

$$A = \ln(6) + \ln(4) + \ln(8)$$

$$B = \ln(72) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$C = \ln(\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{6}) + \ln(3\sqrt{2})$$

2) Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \ln(\sqrt{6} - \sqrt{5}) + \ln(\sqrt{6} + \sqrt{5})$$

$$B = \ln \frac{5}{3} + \ln \frac{3}{7} + \frac{7}{5}$$

$$C = \ln \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \ln \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$D = \frac{1}{4} \ln 81 + \ln \sqrt{3} - \ln \frac{1}{27}$$

$$E = \ln(\sqrt{2} + 1)^{2025} + \ln(\sqrt{2} - 1)^{2025}$$

$$F = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$G = 2\ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3} \ln(e^9)$$

Rappel 2 : Equations-Inéquations

- $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$
- $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$
- $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $\ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$
- La fonction $\ln(U)$ est définie si $U > 0$

Exercice 02

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes

1) $f(x) = \ln(x + 1)$

2) $f(x) = \ln(4 - 2x)$

3) $f(x) = \ln(2 - x) + \ln(x + 3)$

4) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

5) $f(x) = \frac{x+3}{x \ln x}$

6) $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$

Exercice 03

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

(E₁): $\ln(x - 1) = 0$; (E₂): $3 - \ln x = 0$

(E₃): $\ln(x^2 - 1) = 0$

(E₄): $\ln(x^2 + x + 1) = 0$

(E₅): $\ln(3x - 1) = \ln(5x - 10)$

(E₆): $\ln(2x - 1) - \ln(1 - x) = 0$

(E₇): $(x + 2) \ln(x - 3) = 0$

(E₈): $\ln^2(x) + \ln(x) - 2 = 0$;

(E₉): $\ln(x - 3) + \ln(9 - x) = 0$

Exercice 04

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

(I₁): $\ln(x) - 1 \geq 0$; (I₂): $\ln(x - 1) < 0$

(I₃): $\ln(3 - x) - \ln(x + 1) \leq 0$

(I₄): $\ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) > 0$

(I₅): $\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 < 0$

Exercice 05

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

b) Résoudre dans l'intervalle $]0, +\infty[$

l'équation : $\ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2) + \ln(2x)$

2) Résoudre dans l'intervalle $]0, +\infty[$

l'inéquation $\ln x + \ln(x + 1) \geq \ln(x^2 + 1)$.

Exercice 06

Etudier le signe des fonction suivantes sur Df

1) $f(x) = \ln(x + 1)$; 2) $f(x) = 2 - \ln(x)$

3) $f(x) = \ln^2(x) - 3\ln(x)$; 4) $f(x) = \frac{x-2}{\ln(x)}$

Exercice 07

Déterminer le domaine de définition

1) $f(x) = \frac{x \ln x}{1 - \ln x}$; 2) $f(x) = \sqrt{2 - \ln x}$

3) $f(x) = \frac{\ln(x + 1)}{\ln(\ln x)}$

4) $f(x) = \sqrt{1 - \ln(e - x)}$

5) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{(\ln(2x))^2 - 1}}$

Exercice 08

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(S₁): $\begin{cases} 3\ln x + 7\ln y = 4 \\ 2\ln x + 5\ln y = 3 \end{cases}$ (S₂): $\begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$

Exercice 01

1) Calculer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$:

$$\begin{aligned}
 A &= \ln(6) + \ln(4) + \ln(8) \\
 &= \ln(2 \times 3) + \ln(2^2) + \ln(2^3) \\
 &= \ln(2) + \ln(3) + 2\ln(2) + 3\ln(2) \\
 &= 6\ln(2) + \ln(3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \ln(72) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) \\
 &= \ln(9 \times 8) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(2) \\
 &= \ln(3^2 \times 2^3) - 2\ln(2) + \ln(3) \\
 &= \ln(3^2) + \ln(2^3) - 2\ln(2) + \ln(3) \\
 &= 2\ln(3) + 3\ln(2) - 2\ln(2) + \ln(3) \\
 &= 3\ln(3) - \ln(2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= \ln(\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{6}) + \ln(3\sqrt{2}) \\
 &= \ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right) + \ln\left(6^{\frac{1}{2}}\right) + \ln(3) + \ln(\sqrt{2}) \\
 &= \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(6) + \ln(3) + \ln(\sqrt{2}) \\
 &= \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(3) + \ln(3) + \frac{1}{2}\ln(2) \\
 &= \frac{3}{2}\ln(2) + \frac{3}{2}\ln(3)
 \end{aligned}$$

2) Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 A &= \ln(\sqrt{6} - \sqrt{5}) + \ln(\sqrt{6} + \sqrt{5}) \\
 &= \ln(\sqrt{6} - \sqrt{5}) + \ln(\sqrt{6} + \sqrt{5}) \\
 &= \ln[(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5})] \\
 &= \ln(\sqrt{6}^2 - \sqrt{5}^2) \\
 &= \ln(6 - 5) = \ln(1) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \ln\frac{5}{3} + \ln\frac{3}{7} + \frac{7}{5} \\
 &= \ln\left(\frac{5}{3} \times \frac{3}{7} \times \frac{7}{5}\right) = \ln(1) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= \ln\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \ln\sqrt{2 - \sqrt{2}} \\
 &= \frac{1}{2}\ln[(2 + \sqrt{2})] + \frac{1}{2}\ln[(2 - \sqrt{2})] \\
 &= \frac{1}{2}\ln[(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})] \\
 &= \frac{1}{2}\ln(2^2 - \sqrt{2}^2) \\
 &= \frac{1}{2}\ln(2)
 \end{aligned}$$

$$D = \frac{1}{4}\ln 81 + \ln \sqrt{3} - \ln \frac{1}{27}$$

$$= \frac{1}{4}\ln 3^4 + \frac{1}{2}\ln 3 + \ln 27$$

$$= \frac{4}{4}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 3 + \ln 3^3$$

$$= \ln 3 + \frac{1}{2}\ln 3 + 3\ln 3$$

$$= \frac{9}{2}\ln 3$$

$$E = \ln(\sqrt{2} + 1)^{2025} + \ln(\sqrt{2} - 1)^{2025}$$

$$= 2025 \ln[(\sqrt{2} + 1)] + 2025 \ln[(\sqrt{2} - 1)]$$

$$= 2025 \ln[(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)]$$

$$= 2025 \ln(\sqrt{2}^2 - 1^2)$$

$$= 2025 \ln(1) = 0$$

$$F = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$= 2\ln(e) + 4\ln(e) + \ln(e)$$

$$= 5\ln(e) = 5 \times 1 = 5$$

$$G = 2\ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3}\ln(e^9)$$

$$= 2 \times \frac{1}{2}\ln(e) + \ln(e) + \ln(\sqrt{e}) - \frac{9}{3}\ln(e)$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} - 3 = -\frac{1}{2}$$

Exercice 02

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes

1) $f(x) = \ln(x + 1)$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -1$$

$$\text{Donc: } D_f =]-1; +\infty[$$

2) $f(x) = \ln(4 - 2x)$;

$$x \in D_f \Leftrightarrow 4 - 2x > 0$$

$$\Leftrightarrow -2x > -4$$

$$\Leftrightarrow x < 2$$

$$\text{Donc: } D_f =]-\infty; 2[$$

3) $f(x) = \ln(2 - x) + \ln(x + 3)$

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2 - x > 0 \text{ et } x + 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 2 \text{ et } x > -3$$

$$\text{Donc: } D_f =]-\infty; 2[\cap]-3; +\infty[=]-3; 2[$$

4) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0$$

On résoudre l'équation $x^2 - 5x + 6$

$$\Delta = 1 > 0 \text{ donc } x = 2 \text{ ou } x = 3$$

On dresse le tableau de signe de $x^2 - 5x + 6$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 6$	+	0	-	0	+

Donc: $D_f =]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$

5) $f(x) = \frac{x+3}{x \ln x}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \ln x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } (x \neq 0 \text{ et } \ln x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \neq \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq 1$$

Donc: $D_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[$

6) $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \frac{x+2}{1-x} > 0$$

x	$-\infty$	-2	1	$-\infty$
$x+2$	-	0	+	+
$1-x$	+	+	0	-
$\frac{x+2}{1-x}$	-	0	+	-

Donc $D_f =]-2; 1[$

Exercice 03

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

(E₁): $\ln(x-1) = 0$

On note par D_E l'ensemble de définition de l'équation

$$x \in D_E \Leftrightarrow x - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

Donc: $D_E =]1; +\infty[$

$$\ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

On note par S l'ensemble des solutions de l'équation

Donc: $S = \{2\}$

(E₂): $3 - \ln x = 0$

$$x \in D_E \Leftrightarrow x > 0$$

Donc: $D_E =]0; +\infty[$

$$3 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 3 \Leftrightarrow x = e^3$$

Donc $S = \{e^3\}$

(E₃): $\ln(x^2 - 1) = 0$

$$x \in D_E \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \text{ donc } x = 1 \text{ ou } x = -1$$

On dresse le tableau de signe de $x^2 - 1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$x^2 - 1$	+	0	-	0	+

Donc: $D_E =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

$$\ln(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 1) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

Donc: $S = \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$

(E₄): $\ln(x^2 + x + 1) = 0$

On note par D_E l'ensemble de définition de l'équation

$$x \in D_E \Leftrightarrow x^2 + x + 1 > 0$$

Donc: $D_E = \mathbb{R}$;

car $(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 + x + 1 > 0$; $\Delta = -3 < 0$

$$\ln(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + x + 1) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1$$

Donc: $S = \{0; -1\}$

(E₅): $\ln(3x-1) = \ln(5x-10)$

Ensemble de définition :

$$3x - 1 > 0 \text{ et } 5x - 10 > 0$$

Donc $x > \frac{1}{3}$ et $x > 2$

Donc: $D_E =]2; +\infty[$.

$$(E_5) \Leftrightarrow \ln(3x-1) = \ln(5x-10)$$

$$\Leftrightarrow 3x - 1 = 5x - 10 \Leftrightarrow 9 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$$

Donc: $S = \left\{\frac{9}{2}\right\}$

(E₆): $\ln(2x-1) - \ln(1-x) = 0$

Ensemble de définition :

$$2x - 1 > 0 \text{ et } 1 - x > 0 \text{ donc } x > \frac{1}{2} \text{ et } x < 1$$

Donc: $D_I =]\frac{1}{2}; 1[$.

$$(E_6) \Leftrightarrow \ln(2x-1) - \ln(1-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x-1) = \ln(1-x)$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 1 - x \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Donc: $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

(E₇) : $(x + 2) \ln(x - 3) = 0$

On note par D_E l'ensemble de définition de l'équation

$$x \in D_E \Leftrightarrow x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$$

Donc: $D_E =]3; +\infty[$

$$(x + 2) \ln(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 2$$

$$= 0 \text{ ou } \ln(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = -2$$

$$\notin D_E \text{ ou } x = 4$$

Donc: $S = \{4\}$

(E₈) : $\ln^2(x) + \ln(x) - 2 = 0$

On pose $X = \ln(x)$, donc :

(E₅) $\Leftrightarrow X^2 + X - 2 = 0$ Avec $X = \ln(x)$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$$

$$X = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} \quad \text{ou} \quad X = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2}$$

$$X = 1 \quad \text{ou} \quad X = -2$$

$$\ln(x) = 1 \quad \text{ou} \quad \ln(x) = -2$$

$$x = e \quad \text{ou} \quad x = e^{-2}$$

Donc: $S = \{e; e^{-2}\}$

(E₉) : $\ln(x - 3) + \ln(9 - x) = 0$

Ensemble de définition :

$$x - 3 > 0 \text{ et } 9 - x > 0 \quad \text{donc} \quad x > 3 \text{ et } x < 9$$

L'équation est définie sur l'intervalle $]3; 9[$.

Donc: $D_I =]3; 9[$.

$$\ln(x - 3) + \ln(9 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln[(x - 3)(9 - x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln[(x - 3)(9 - x)] = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(9 - x) = 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 12x - 27 = 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 12x - 28 = 0$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \times (-1) \times (-28) = 32$$

$$x = \frac{-12 + \sqrt{32}}{-2} = 6 - 2\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x$$

$$= \frac{-12 - \sqrt{32}}{-2} = 6 + 2\sqrt{2}$$

Les solutions sont donc $6 - 2\sqrt{2}$ et $6 + 2\sqrt{2}$ car elles appartiennent bien à l'ensemble de définition $]3; 9[$.

Donc: $S = \{6 - 2\sqrt{2}; 6 + 2\sqrt{2}\}$

Exercice 04

(I₁) : $\ln(x) - 1 \geq 0$

On note par D_I l'ensemble de définition de l'inéquation

$$x \in D_I \Leftrightarrow x > 0$$

Donc: $D_I =]0; +\infty[$

$$\ln(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \geq \ln(e)$$

$$\Leftrightarrow x \geq e$$

$$\Leftrightarrow x \in [e; +\infty[$$

Donc: $S = [e; +\infty[\cap]0; +\infty[= [e; +\infty[$

(I₂) : $\ln(x - 1) < 0$

On note par D_I l'ensemble de définition de l'inéquation

$$x \in D_I \Leftrightarrow x - 1 > 0$$

Donc: $D_I =]1; +\infty[$

$$\ln(x - 1) < 0 \Leftrightarrow \ln(x - 1) < \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow x - 1 < 1$$

$$\Leftrightarrow x < 2$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; 2[$$

Donc: $S =]-\infty; 2[\cap]1; +\infty[=]1; 2[$

(I₃) : $\ln(3 - x) - \ln(x + 1) \leq 0$

L'inéquation est définie si :

$$3 - x > 0 \text{ et } x + 1 > 0$$

Donc $x < 3$ et $x > -1$

L'inéquation est définie sur $] -1; 3[$.

On restreint donc la recherche des solutions à cet intervalle.

$$\ln(3 - x) - \ln(x + 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(3 - x) \leq \ln(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 3 - x \leq x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq 2x$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x$$

L'ensemble solution est donc

$$]-1; 3[\cap [1; +\infty[$$

Donc $S = [1; 3[$.

$$(I_4) : \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) > 0$$

L'inéquation est définie si $1 - \frac{2}{x} > 0$

Donc $\frac{x-2}{x} > 0$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x	-	0	+	+
x-2	-	-	0	+
$\frac{x-2}{x}$	+	-	0	+

Donc : $D_I =]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[$

$$\ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) > \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x} > 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x} < 0$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$

L'ensemble solution est donc

$$]-\infty ; 0[\cap (]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[)$$

Donc $S =]-\infty ; 0[$

$$(I_5) : \ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 < 0$$

$x \in D_I \Leftrightarrow x > 0$

Donc : $D_I =]0 ; +\infty[$

➤ Résoudrons l'équation

$$\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = 0$$

On pose $X = \ln(x)$, donc :

$$\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \quad ; \text{avec } X = \ln(x)$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$$

$$X = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} \quad \text{ou} \quad X = \frac{3 + \sqrt{1}}{2}$$

$$X = 1 \quad \text{ou} \quad X = 2$$

$$\ln(x) = 1 \quad \text{ou} \quad \ln(x) = 2$$

$$x = e \quad \text{ou} \quad x = e^2$$

➤ Tableau de signe de

$$\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = (\ln x - 1)(\ln x - 2)$$

<u>x</u>	0	<u>e</u>	<u>e</u> ²	+∞	
$\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2$	+	0	-	0	+

Donc $S =]e ; e^2[$

Exercice 05

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$x^2 + 4x - 5 = 0.$$

L'équation suivante : $x^2 + 4x - 5 = 0$ est une équation de deuxième degré :

$$\Delta = 16 + 4 \times 1 \times 5 = 16 + 20 = 36 > 0$$

Donc l'équation admet deux solutions réels sont :

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 - 6}{2} = -5 \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 + 6}{2} = 1$$

$$\text{D'où : } S = \{-5, 1\}$$

b) Résoudre dans l'intervalle $]0, +\infty[$

l'équation :

$$\ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2) + \ln(2x)$$

$\ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2) + \ln(2x)$ l'équation est définie pour : $x^2 + 5 > 0$, $x + 2 > 0$ et $x > 0$

Donc : $x \in]0, +\infty[$

Soit $x \in]0, +\infty[$,

$$(E) \Leftrightarrow \ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2) + \ln(2x)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 5) = \ln(2x(x + 2))$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5 = 2x(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5 = 2x^2 + 4x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$$

(d'après 1)) deux solutions -5 et 1 or $x \in]0, +\infty[$

Donc : $S = \{1\}$

2) Résoudre dans l'intervalle $]0, +\infty[$

$$\text{l'inéquation } \ln x + \ln(x + 1) \geq \ln(x^2 + 1).$$

On a : $\ln(x) + \ln(x + 1) \geq \ln(x^2 + 1)$ est définie pour : $x^2 + 1 > 0$, $x + 1 > 0$ et $x > 0$

Donc : $x \in]0, +\infty[$

Soit $x \in]0, +\infty[$

$$\ln(x) + \ln(x + 1) \geq \ln(x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x(x + 1)) \geq \ln(x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow x(x + 1) \geq x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x \geq x^2 + 1 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Donc : $S = [1, +\infty[$

Exercice 06

Etudier le signe des fonction suivantes sur D_f

1) $f(x) = \ln(x + 1)$

$D_f =]-1; +\infty [$

$\ln(x + 1) < 0 \Leftrightarrow x + 1 < 1 \Leftrightarrow x < 0$

$\ln(x + 1) > 0 \Leftrightarrow x + 1 > 1 \Leftrightarrow x > 0$

On dresse le tableau de signe de $\ln(x + 1)$

x	-1	0	$+\infty$
f(x)	-	0	+

2) $f(x) = 2 - \ln(x)$

$D_f =]0; +\infty [$

$2 - \ln(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 2$

$\Leftrightarrow x < e^2$

$2 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 2$

$\Leftrightarrow x > e^2$

n dresse le tableau de signe de $\ln(x + 1)$

x	0	e^2	$+\infty$
f(x)	+	0	-

3) $f(x) = \ln^2(x) - 3\ln(x)$

$D_f =]0; +\infty [$

Résoudrons l'équation $\ln^2(x) - 3\ln(x) = 0$

On pose $X = \ln(x)$, donc :

$\ln^2(x) - 3\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) (\ln(x) - 3) = 0$

$\ln(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(x) = 3$

$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = e^3$

➤ Tableau de signe de $\ln^2(x) - 3\ln(x)$

x	0	e	e^3	$+\infty$	
$\ln^2(x) - 3\ln(x)$	+	0	-	0	+

4) $f(x) = \frac{x-2}{\ln(x)}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \neq 0$

$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \neq \ln 1$

$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq 1$

Donc: $D_f =]0; 1 [\cup]1; +\infty [$

Tableau de signe de $\frac{x-2}{\ln(x)}$

x	0	1	2	$+\infty$	
$x - 2$		-	-	0	+
$\ln(x)$		-	0	+	+
$\frac{x - 2}{\ln(x)}$		+	0	-	+

Exercice 07

Déterminer le domaine de définition

1) $f(x) = \frac{x \ln x}{1 - \ln x}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } 1 - \ln x \neq 0$

$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \neq 1$

$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \neq \ln e$

$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq e$

Donc: $D_f =]0; e [\cup]e; +\infty [$

2) $f(x) = \sqrt{2 - \ln x}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } 2 - \ln x \geq 0$

$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \leq 2$

$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \leq e^2$

Donc $D_f =]-\infty; e^2] \cap]0; +\infty [=]0; e^2]$

3) $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln(\ln x)}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x + 1 > 0 \text{ et } x > 0$

et $\ln x > 0 \text{ et } \ln(\ln x) \neq 0$

$\Leftrightarrow x > -1 \text{ et } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \text{ et } \ln x \neq 1$

$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq 1 \text{ et } x \neq e$

Donc: $D_f =]0; 1 [\cup]1; e [\cup]e; +\infty [$

4) $f(x) = \sqrt{1 - \ln(e - x)}$

$x \in D_f \Leftrightarrow e - x > 0 \text{ et } 1 - \ln(e - x) \geq 0$

$\Leftrightarrow x < e \text{ et } \ln(e - x) \leq 1$

$\Leftrightarrow x < e \text{ et } e - x \leq e$

$\Leftrightarrow x < e \text{ et } x \geq 0$

Donc $D_f =]-\infty; e [\cap [0; +\infty [= [0; e [$

5) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{(\ln(2x))^2 - 1}}$

$x \in D_f \Leftrightarrow 2x > 0 \text{ et } (\ln(2x))^2 - 1 > 0$

$(\ln(2x))^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(2x) = 1 \text{ ou } \ln(2x) = -1$

$\Leftrightarrow 2x = e \text{ ou } 2x = e^{-1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{e}{2} \text{ ou } x = \frac{e^{-1}}{2} = \frac{1}{2e}$

Tableau de signe de $(\ln(2x))^2 - 1$

x	0	$\frac{1}{2e}$	$\frac{e}{2}$	$+\infty$		
$(\ln(2x))^2 - 1$		+	0	-	0	+

Donc: $D_f =]0; \frac{1}{2e} [\cup]\frac{e}{2}; +\infty [$

Exercice 08

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases} 3\ln x + 7\ln y = 4 \\ 2\ln x + 5\ln y = 3 \end{cases};$$

 (S_1) est défini si $x > 0$ et $y > 0$ 1^{ère} méthode :

$$\begin{cases} 3\ln x + 7\ln y = 4 \\ 2\ln x + 5\ln y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{4 - 7\ln y}{3} \\ 2\ln x + 5\ln y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{4 - 7\ln y}{3} \\ 2 \cdot \frac{4 - 7\ln y}{3} + 5\ln y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{4 - 7\ln y}{3} \\ \frac{8 - 14\ln y + 15\ln y}{3} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{4 - 7\ln y}{3} \\ \ln y + 8 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{4 - 7\ln y}{3} \\ \ln y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{4 - 7}{3} \\ \ln y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = -1 \\ \ln y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-1} \\ y = e \end{cases}$$

$$\text{Donc : } S = \{(e^{-1}; e)\}$$

2^{ème} méthode :On pose $X = \ln(x)$ et $Y = \ln(y)$ donc

$$\begin{cases} 3\ln x + 7\ln y = 4 \\ 2\ln x + 5\ln y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3X + 7Y = 4 \\ 2X + 5Y = 3 \end{cases}$$

Par la méthode de déterminant on a :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 14 = 1$$

$$D_X = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 21 = -1$$

$$D_Y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1$$

$$\text{Donc } X = \frac{D_X}{D} = -1 \quad \text{et} \quad Y = \frac{D_Y}{D} = 1$$

$$\text{Donc } \ln(x) = -1 \quad \text{et} \quad \ln(y) = 1$$

$$\text{Donc } x = e^{-1} \quad \text{et} \quad y = e$$

$$\text{Donc : } S = \{(e^{-1}; e)\}$$

$$(S_2): \begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases};$$

 (S_2) est défini si $x > 0$ et $y > 0$ 1^{ère} méthode :On pose $X = \ln(x)$ et $Y = \ln(y)$ donc

$$\begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \times Y = -10 \\ X + Y = 3 \end{cases}$$

Rappel :Pour déterminer deux réels x et y tels que $x + y = S$ et $x \times y = P$ avec S et P donnésOn résout l'équation $t^2 - St + P = 0$ Donc on résout l'équation $t^2 - 3t - 10 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 49$$

$$X = \frac{3 - \sqrt{49}}{2} \quad \text{et} \quad Y = \frac{3 + \sqrt{49}}{2}$$

$$X = -2 \quad \text{et} \quad Y = 5$$

$$\ln x = -2 \quad \text{et} \quad \ln y = 5$$

$$x = e^{-2} \quad \text{et} \quad y = e^5$$

$$\text{Donc : } S = \{(e^{-2}; e^5); (e^5; e^{-2})\}$$

2^{ème} méthode :

$$\begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -10 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\ln y - \ln^2 y + 10 = 0 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln^2 y - 3\ln y - 10 = 0 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\ln y + 2)(\ln y - 5) = 0 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = -2 \text{ ou } \ln y = 5 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{-2} \text{ ou } y = e^5 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{-2} \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = e^5 \\ \ln x = 3 - \ln y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{-2} \\ \ln x = 5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = e^5 \\ \ln x = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{-2} \\ x = e^5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = e^5 \\ x = e^{-2} \end{cases}$$

$$\text{Donc : } S = \{(e^{-2}; e^5); (e^5; e^{-2})\}$$