

Etude de fonction Logarithme Népérien 2 : Limites-Interprétations géométriques

Logarithme népérien 2
Limites-Interprétations
géométriques

**Deuxième bac sciences
PC/SVT/ST**

**Partie 2 : Limites et
interprétations
géométriques LN**

Limites de la fonction ln

- $FI: \frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty} ; 0 \times \infty ; +\infty - (+\infty)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0^- ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Exercice 01

Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln x$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2(x)}{x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x-1}$
 4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} - \ln x$; 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x)}$
 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) + x$; 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x + \frac{1}{x})$
 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^2}$; 9) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 (\ln x)^3$

Exercice 02

Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2(x)}{x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1}$
 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \ln(x)}{x + \ln x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2(x) + \ln x$
 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) - \ln x$; 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x) + 1}{\ln x}$
 8) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} + \ln x$; 9) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln(\frac{3}{x})}$
 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}$; 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - x$

Exercice 03

A l'aide d'un changement de variable calculer

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) \ln(x - 1)$
 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x})$; 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$
 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x)}{x}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln x)^3$

Exercice 04

f une fonction définit sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$$

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et Interpréter le résultat géométrique
 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de (Cf) au voisinage de $+\infty$

Exercice 05

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = 1 - x + \ln x$$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement
 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis étudier la branche infinie de (Cf) au voisinage de $+\infty$
 3) Étudier la position relative de (Cf) et la droite : $(\Delta): y = -x$

Exercice 06

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{4x \ln x}{1+x} ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter graphiquement le résultat.
 2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter le résultat géométriquement

Exercice 07

Soit f une fonction définit sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) ; \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

- 1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, puis interpréter le résultat géométriquement
 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter le résultat géométriquement

Exercice 08

Soit f une fonction définit sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + (\sqrt{x} - 2) \ln(x)$$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et Interpréter le résultat géométriquement
 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$
 3) a) Montrer que la courbe (Cf) admet une branche parabolique de direction la droite $(\Delta): y = x$ au voisinage de $+\infty$
 b) Etudier la position relative de (Cf) et la droite (Δ) sur $]0; +\infty[$

Exercice 01

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln x$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2(x)}{x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x-1}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} - \ln x$; 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x)}$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) + x$; 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x + \frac{1}{x})$

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^2}$; 9) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 (\ln x)^3$

Solution :

Rappel (F.I): $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$; $+\infty - (+\infty)$

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln x = +\infty$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{x} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2 x = +\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} - \ln x = \frac{+\infty}{0^+} - (-\infty) = +\infty$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) + x = +\infty$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x + \frac{1}{x}) = +\infty$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} \right)^2 = 0$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

9) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 (\ln x)^3 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x))^3 = 0$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$

Exercice 02

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2(x)}{x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1}$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \ln(x)}{x + \ln x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2(x) + \ln x$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) - \ln x$; 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x) + 1}{\ln x}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} + \ln x$; 9) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln(\sqrt[3]{x})}$

10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}$; 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - x$

Solution :

Rappel (F.I): $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \times \infty$; $+\infty - (+\infty)$

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$

Forme indéterminée $+\infty - (+\infty)$

Levons l'indétermination :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) \end{aligned}$$

Et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} = 1$.Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = +\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2(x)}{x}$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2 x = +\infty$ Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{x} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1}$

Il s'agit d'une forme indéterminée : $\frac{\infty}{\infty}$.

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$, on a,

comme limite d'un quotient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{0}{1} = 0 ; \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \ln(x)}{x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 - \frac{\ln(x)}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{\ln(x)}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{\ln(x)}{x}}{1 + \frac{\ln(x)}{x}} = 2$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2(x) + \ln x$$

Il s'agit d'une forme indéterminée " $+\infty - \infty$ ".

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2(x) + \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x (\ln x + 1) = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) - \ln x$$

Il s'agit d'une forme indéterminée " $+\infty - \infty$ ".

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x (\ln x + 1) = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x) + 1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x)}{\ln x} + \frac{1}{\ln(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{\ln(x)} = 2$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} + \ln x$$

Il s'agit d'une forme indéterminée " $+\infty - \infty$ ".

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} + \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x^2 \ln x}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x^2 \ln x = 1 + 0 = 1$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln(\sqrt[3]{x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{1}{3} x \ln x} = -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^- ; 0 < x < 1 \Leftrightarrow \ln(x) < 0$$

$$10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - x$$

Il s'agit d'une forme indéterminée " $+\infty - \infty$ ".

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{\ln(x^2 + 1)}{x} - 1 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{\ln\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right)}{x} - 1 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{\ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} - 1 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{2 \ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} - 1 \right]$$

$$= -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x)}{x} = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$$

Exercice 03

A l'aide d'un changement de variable calculer

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{x} ; 2) \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) \ln(x - 1)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) ; 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x)}{x} ; 6) \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3$$

Solution :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{3x} \times 3$$

$$\text{On pose } t = 3x \text{ or } x \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} \times 3 = 3$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) \ln(x - 1)$$

Il s'agit d'une forme indéterminée " $0 \times \infty$ ".

On pose $X = x - 1$ donc $x = X + 1$;

or $x \rightarrow 1^+ \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$

$$L = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) \ln(x - 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1)(x + 1) \ln(x - 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} X(X + 1 + 1) \ln(X)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} X \ln(X) (X + 2) = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} X \ln(X) = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Il s'agit d'une forme indéterminée : " $\infty \cdot 0$ ".

On pose $X = \frac{1}{x}$ donc $x = \frac{1}{X}$;

or $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) &= \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} \ln(1 + X) \\ &= \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

On pose $X = \sqrt{x}$ donc $x = X^2$

or $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X^2)}{X} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(X)}{X} = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(X)}{X} = 0$$

$$\begin{aligned} 5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \sqrt{x^2})^2}{\sqrt{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 \ln \sqrt{x})^2}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 \end{aligned}$$

On pose $X = \sqrt{x}$ donc $x = X^2$;

or $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln X}{X} \right)^2 = 0 ; \text{ Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln X}{X} = 0 \end{aligned}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt[3]{x})^3 (\ln(\sqrt[3]{x}))^3$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt[3]{x})^3 (3 \ln \sqrt[3]{x})^3$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (3 \sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x})^3$$

On pose $X = \sqrt[3]{x}$ donc $x = X^3$;

or $x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 = \lim_{X \rightarrow 0^+} (3 X \ln X)^3 = 0$$

; (car $\lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln X = 0$)

Exercice 04

f une fonction définit sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et Interpréter le résultat géométrique

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de (Cf) au voisinage de $+\infty$

Solution :

f une fonction définit sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et Interpréter le résultat géométrique

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(x) + 1 + \ln(x)}{x} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Car : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$

Donc la droite d'équation $x = 0$ c-à-dire l'axe des abscisses est asymptotes verticale à (Cf)

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de (Cf) au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$= 0$$

Car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$$= 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$$

Donc la courbe (Cf) admet une branche parabolique suivant l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

Exercice 05

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 1 - x + \ln x$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis étudier la branche infinie de (Cf) au voisinage de $+\infty$

3) Étudier la position relative de (Cf) et la droite : $(\Delta): y = -x$

Solution :

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 1 - x + \ln x$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x + \ln x = -\infty$$

Car : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

Donc la droite d'équation $x = 0$ c-à-dire l'axe des abscisses est asymptote verticale à (Cf)

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis étudier la branche infinie de (Cf) au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x + \ln x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x + \ln x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} \right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x}$$

$$= -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x + \ln(x) + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \ln(x)$$

$$= +\infty$$

Donc la courbe (Cf) admet une branche parabolique suivant la droite (Δ) d'équation $y = -x$ au voisinage de $+\infty$

2) Étudier la position relative de (Cf) et la droite : $(\Delta): y = -x$

$$f(x) - (-x) = 1 - x + \ln(x) + x$$

$$= 1 + \ln(x)$$

Cherchons le signe de $1 + \ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$

$$1 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

<u>x</u>	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$	
$f(x) + x$	1	-	0	+
<u>Position relative</u>	(Cf) <u>est</u> en dessous de (Δ)	$A(\frac{1}{e}; -\frac{1}{e})$ Point d'intersection	(Cf) <u>est</u> en dessus de (Δ)	

Exercice 06

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{4x \ln x}{1+x}; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et

que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter graphiquement le résultat.

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis

interpréter le résultat géométriquement

Solution :

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{4x \ln x}{1+x}; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter graphiquement le résultat.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x \ln x}{1+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x \ln x}{x(\frac{1}{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{\frac{1}{x} + 1} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4x \ln x}{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{x(1 + \frac{1}{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{x(\frac{1}{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{x} \times \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Interprétation géométrique :

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Donc la courbe (Cf) admet une branche parabolique suivant l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter le résultat géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{4x \ln x}{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \ln x}{1+x} = -\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1+x = 1$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométrique :

la courbe (Cf) admet une demi-tangente verticale au point A(0 ; 0) dirigée vers le bas

Exercice 07

Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right); \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, puis interpréter le résultat géométriquement

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat géométriquement

Solution :

Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right); \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, puis interpréter le résultat géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{On pose } X = \frac{1}{x} \text{ donc } x = \frac{1}{X}; \text{ or } x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) &= \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} \ln (1 + X) \\ &= \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

Interprétation géométrique :

La droite (D) d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe (Cf) au voisinage de $+\infty$

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat géométriquement

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométrique :

(Cf) la courbe de la fonction f admet une demi-tangente verticale en 0 dirigée vers le haut

Exercice 08

Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + (\sqrt{x} - 2)\ln(x)$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et Interpréter le

résultat géométriquement

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$

3) a) Montrer que la courbe (Cf) admet une branche parabolique de direction la droite $(\Delta) : y = x$ au voisinage de $+\infty$

b) Etudier la position relative de (Cf) et la droite (Δ) sur $]0; +\infty[$

Solution :

Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + (\sqrt{x} - 2)\ln(x)$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et Interpréter le

résultat géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + (\sqrt{x} - 2)\ln(x) = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} - 2 = -2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Donc la droite d'équation $x = 0$ c-à-dire l'axe des abscisses est asymptote verticale à (Cf)

2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + (\sqrt{x} - 2)\ln(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - 2) = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

• On pose $t = \sqrt{x}$ donc $x = t^2$

or $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t^2)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(t)}{t} = 0$$

$$\text{Car } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$$

b) Montrer que la courbe (Cf) admet une branche parabolique de direction la droite $(\Delta) : y = x$ au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + (\sqrt{x} - 2)\ln(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{x} - \frac{2\ln(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} - \frac{2\ln(x)}{x} = 1$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + (\sqrt{x} - 2)\ln(x) - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - 2)\ln(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - 2) = +\infty$$

Donc la courbe (Cf) admet une branche parabolique de direction la droite

$(\Delta) : y = x$ au voisinage de $+\infty$

b) Etudier la position relative de (Cf) et la droite (Δ) sur $]0; +\infty[$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$f(x) - y = (\sqrt{x} - 2)\ln(x)$$

On va étudier le signe de $f(x) - y$

$$f(x) - y = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)\ln(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = 0 \text{ ou } \ln(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \text{ ou } x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = 1$$

Remarque : la droite (Δ) coupe (Cf) en deux points, sont $A(1; 1)$ et $B(4; 4)$

On dresse le tableau de signe de $f(x) - y$

<u>x</u>	0	1	4	$+\infty$	
$\sqrt{x} - 2$	—	—	0	+	
$\ln(x)$	—	0	+	+	
$f(x) - y$	+	0	—	0	+

Donc (Cf) est en dessous de la droite (Δ) sur $[1; 4]$ et en dessus de la droite (Δ) sur les intervalles $]0; 1]$ et $[4; +\infty[$