

Etude de fonction Logarithme Népérien 3 :Dérivée-TV-Signe

Logarithme népérien 3 :
Dérivée -TV-Signe

Deuxième bac sciences
PC/SVT/ST

Fonction Logarithme
népérien 3 : Darivée-
TV-Signe

:

Série corrigée 3 : Dérivée-TV

2 Bac sciences
PC/SVT/ST

Logarithme népérien

Etude des fonctions

Rappels

- La primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée fonction logarithme népérien on la note par $\ln$
- La fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout x de $]0, +\infty[$: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Dérivée de la fonction $\ln(U)$ avec $U \neq 0$

Si U est dérivable sur I alors $\ln(|U|)$ est dérivable sur I et on a ; $\ln'(|U(x)|) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

Primitives

Les primitives de la fonction $x \rightarrow \frac{U'(x)}{U(x)}$ sur I sont les fonctions $x \rightarrow \ln(|U(x)|) + c$; $c \in \mathbb{R}$

Exercice 01

Calculer $f'(x)$ dans chaque cas :

- 1) $f(x) = 3 - x + 2 \ln x$; 2) $f(x) = \frac{2}{x} + \ln(x)$
- 3) $f(x) = x^2 + 2x \ln x$; 4) $f(x) = \frac{2}{\ln(x)}$
- 5) $f(x) = \ln(2 - x) + \ln(x^2 - 5x + 6)$
- 6) $f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$; 7) $f(x) = \frac{x+3}{x \ln x}$;
- 8) $f(x) = 2x - \ln^2(x)$ 9) $f(x) = x - \frac{\ln^2(x)}{x}$
- 10) $f(x) = \sqrt{2 - \ln x}$; 11) $f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

Exercice 02

Soit g une fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x)$$

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- 2) Calculer $g'(x)$; puis dresser le tableau des variations de g
- 3) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$; $g(x) > 0$

Exercice 03

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = 3 - x + 2 \ln x$$

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) a) Calculer $f'(x)$ puis déterminer les variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$
- b) En déduire le tableau de variations de f 3) Calculer $f''(x)$ et étudier la convexité de f

Exercice 04

Soit h une fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$h(x) = 3 (\ln x)^3 + \ln x - 4$$

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$
- 2) Calculer h' sur $]0, +\infty[$ puis déduire que h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$
- 3) Calculer $h(e)$ et déduire que : $(\forall x \in]0, e])$; $h(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [e, +\infty[)$; $h(x) \geq 0$

Exercice 05

Soit la fonction f définie sur $] -2, 1[$ par

$$f(x) = \ln \left(\frac{x+2}{1-x} \right)$$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
- 2) a) Calculer $f'(x)$ sur $] -2, 1[$
- b) Déterminer le sens de variation de la fonction f

Exercice 06

Soit g une fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1}$$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- 2) Montrer que $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ sur $]0, +\infty[$;
- 3) Dresser son tableau de variation de g
- 4) Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[$; $g(x) > 0$

Exercice 07

Soit f la fonction numérique définie sur

$$[0, +\infty[\text{ par } \begin{cases} f(x) = x^4 (\ln x - 1)^2 ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) a) Montrer que $f'(x) = 2x^3 (\ln x - 1)(2 \ln x - 1)$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$
- b) Dresser le tableau de variation de f

Exercice 08

Déterminer les primitives des fonctions :

a) $f(x) = \frac{x^5}{1+x^6}$; $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$; $I =]0, 1[$

Exercice 01

Calculer $f'(x)$ dans chaque cas :

1) $f(x) = 3 - x + 2 \ln x$; 2) $f(x) = \frac{2}{x} + \ln(x)$

3) $f(x) = x^2 + 2x \ln x$; 4) $f(x) = \frac{2}{\ln(x)}$

5) $f(x) = \ln(2 - x) + \ln(x^2 - 5x + 6)$

6) $f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$; 7) $f(x) = \frac{x+3}{x \ln x}$;

8) $f(x) = 2x - \ln^2(x)$ 9) $f(x) = x - \frac{\ln^2(x)}{x}$

10) $f(x) = \sqrt{2 - \ln x}$; 11) $f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

Solution

Calculer $f'(x)$ dans chaque cas :

1) $f(x) = 3 - x + 2 \ln x$

$$f'(x) = (3 - x + 2 \ln x)'$$

$$= 0 - 1 + 2 \times \frac{1}{x}$$

$$= -1 + \frac{2}{x}$$

$$= \frac{2 - x}{x}$$

2) $f(x) = \frac{2}{x} + \ln(x)$

$$f'(x) = \left(\frac{2}{x} + \ln(x)\right)' = 2 \times \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-2}{x^2} + \frac{x}{x^2}$$

$$= \frac{x - 2}{x^2}$$

3) $f(x) = x^2 + 2x \ln x$

$$f'(x) = (x^2 + 2x \ln x)'$$

$$= 2x + 2x' \ln(x) + 2x \ln' x$$

$$= 2x + 2 \ln(x) + 2x \times \frac{1}{x}$$

$$= 2x + 2 \ln(x) + 2$$

4) $f(x) = \frac{2}{\ln(x)}$

$$f'(x) = \left(\frac{2}{\ln(x)}\right)' = 2 \times \frac{-\ln'(x)}{\ln^2(x)}$$

$$= -2 \times \frac{\frac{1}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{-2}{x \ln^2(x)}$$

5) $f(x) = \ln(2 - x) + \ln(x^2 - 5x + 6)$

$$f'(x) = (\ln(2 - x) + \ln(x^2 - 5x + 6))'$$

$$= \frac{(2 - x)'}{(2 - x)} = \frac{0 - 1}{2 - x} = \frac{-1}{2 - x} = \frac{1}{x - 2}$$

6) $f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{1 - \ln x}\right)'$$

$$= \frac{\ln' x (1 - \ln x) - \ln x (1 - \ln x)'}{(1 - \ln x)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} (1 - \ln x) - \ln x \times \frac{1}{x}}{(1 - \ln x)^2}$$

$$= \frac{(1 - \ln x) - \ln x}{x(1 - \ln x)^2} = \frac{1 - 2 \ln x}{x(1 - \ln x)^2}$$

7) $f(x) = \frac{x+3}{x \ln x}$

$$f'(x) = \left(\frac{x+3}{x \ln x}\right)'$$

$$= \frac{(x+3)'(x \ln x) - (x+3)(x \ln x)'}{(x \ln x)^2}$$

$$= \frac{x \ln x - (x+3) \left(x' \ln x + x \times \frac{1}{x}\right)}{(x \ln x)^2}$$

$$= \frac{x \ln x - (x+3)(\ln x + 1)}{(x \ln x)^2}$$

$$= \frac{x \ln x - (x \ln x + x + 3 \ln x + 3)}{(x \ln x)^2}$$

$$= \frac{-(x + 3 \ln x + 3)}{(x \ln x)^2}$$

8) $f(x) = 2x - \ln^2(x)$

$$f'(x) = (2x - \ln^2(x))' = 2 - 2 \ln'(x) \ln^1(x)$$

$$= 2 - \frac{2 \ln(x)}{x}$$

9) $f(x) = x - \frac{\ln^2(x)}{x}$

$$f'(x) = \left(x - \frac{\ln^2(x)}{x}\right)'$$

$$= 1 - \frac{\ln^2(x)' x - \ln^2(x) x'}{x^2}$$

$$= 1 - \frac{\frac{2 \ln(x)}{x} \times x - \ln^2(x)}{x^2}$$

$$= 1 - \frac{2 \ln(x) - \ln^2(x)}{x}$$

$$10) f(x) = \sqrt{2 - \ln x}$$

Rappels :

$$[\sqrt{u}]' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad \text{et} \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{2 - \ln x})' \\ &= \frac{(2 - \ln x)'}{2\sqrt{2 - \ln x}} = \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{2 - \ln x}} = \frac{-1}{2x\sqrt{2 - \ln x}} \end{aligned}$$

$$11) f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Rappels :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\text{et} \quad [\ln(u)]' = \frac{u'}{u} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)'$$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - x \times \frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

Exercice 02

Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x)$$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2) Calculer $g'(x)$; puis dresser le tableau des variations de g

3) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; \quad g(x) > 0$

Solution

Soit g une fonction définie sur

$]0; +\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x)$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \ln(x) = +\infty$$

$$\text{Car} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

$$\text{Car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

2) Calculer $g'(x)$; puis dresser le tableau des variations de g

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Comme $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $x-1$.

On a $g(1) = 1 - \ln 1 = 1$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	0
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

3) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; \quad g(x) > 0$

On en déduit que pour tout x de $]0; +\infty[$, on a 1 est une valeur minimale de g sur $]0; +\infty[$

Donc $g(x) = x - \ln x \geq 1 > 0$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[; \quad g(x) > 0$

Exercice 03

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = 3 - x + 2 \ln x$$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Calculer $f'(x)$ puis déterminer les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$

3) Calculer $f''(x)$ et étudier la convexité de f

Solution

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = 3 - x + 2 \ln x$$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - x + 2 \ln x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{3}{x} - 1 + 2 \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 - x + 2 \ln x = -\infty$$

2) a) Calculer $f'(x)$ puis déterminer les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$

Sur $]0; +\infty[$ f est dérivable et, on a :

$$f'(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{2-x}{x}$$

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2-x$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0; 2]$ et str décroissante sur $[2; +\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$1 + 2 \ln 2$	$-\infty$

$$\triangleright f(2) = 3 - 2 + 2 \ln 2 = 1 + 2 \ln 2$$

2) Calculer $f''(x)$ et étudier la convexité de f Sur $]0; +\infty[$, on a f' est dérivable de plus :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-1 \times x - (2 - x) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{-x - 2 + x}{x^2} \\ &= \frac{-2}{x^2} < 0 \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f est concave sur $]0; +\infty[$.

Exercice 04

Soit h une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = 3(\ln x)^3 + \ln x - 4$$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ 2) Calculer h' sur $]0; +\infty[$ puis déduire que h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ 3) Calculer $h(e)$ et déduire que : $(\forall x \in]0; e]) ; h(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [e; +\infty[) ; h(x) \geq 0$

Solution

Soit une fonction h définit sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = 3(\ln x)^3 + \ln x - 4$$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3(\ln x)^3 + \ln x - 4 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3(\ln x)^3 + \ln x - 4 = +\infty$$

1) Calculer h' sur $]0; +\infty[$ puis déduire que h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ La fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme des fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$

Rappel :

$$(\ln(x))' = -\frac{1}{x}; (u^2)' = 2uu'$$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} h'(x) &= 9(\ln x)'(\ln x)^2 + \frac{1}{x} \\ &= \frac{9(\ln x)^2}{x} + \frac{1}{x} > 0 \end{aligned}$$

D'où la fonction h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ 2) Calculer $h(e)$ puis déduire que : $(\forall x \in]0; e]) ; h(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [e; +\infty[) ; h(x) \geq 0$ On a $h(e) = 0$ Soit : $x \in]0; e]$

$$x \in]0; e] \Rightarrow x \leq e$$

et h est str croissante sur $]0; e]$

$$\Rightarrow h(x) \leq h(e)$$

$$\Rightarrow h(x) \leq 0$$

Soit : $x \in [e; +\infty[$

$$x \in [e; +\infty[\Rightarrow e \leq x$$

et h est str croissante sur $[e; +\infty[$

$$\Rightarrow h(e) \leq h(x)$$

$$\Rightarrow 0 \leq h(x)$$

Exercice 05

Soit la fonction f définie sur $] -2 ; 1[$ par

$$f(x) = \ln \left(\frac{x+2}{1-x} \right)$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 2)a) Calculer $f'(x)$ sur $] -2 ; 1[$ b) Déterminer le sens de variation de la fonction f

Solution

Soit la fonction f définie sur $] -2 ; 1[$ par

$$f(x) = \ln \left(\frac{x+2}{1-x} \right)$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Par composition de limites, on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{x+2}{1-x} = 0^+ \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x+2}{1-x} = +\infty \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

2)a) Calculer $f'(x)$ sur $]-2; 1[$ Soit : $]-2; 1[$

$$u'(x) = \frac{1 \times (1-x) - (x+2) \times (-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1-x+x+2}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2}$$

$$\text{Donc : } f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{3}{(1-x)^2}}{\frac{3}{u(x)}}$$

b) Déterminer le sens de variation de la fonction f

$$f'(x) = \frac{3}{(1-x)^2}$$

 u est strictement positive sur $]-2; 1[$ et

$$\frac{3}{(1-x)^2} > 0.$$

Donc $f'(x) > 0$.Et donc la fonction f est strictement croissante sur $]-2; 1[$.

x	-2	1
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Exercice 06Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ 2) Montrer que $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ sur $]0; +\infty[$;3) Dresser son tableau de variation de g 4) Montrer que : $\forall x \in [0; +\infty[; g(x) > 0$ **Solution**Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = 0$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(1) = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

2) Rappels :

$$[\ln(u)]' = \frac{u'}{u} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{et} \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$g'(x) = -\frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} - \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{\frac{1}{x}}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{x(x+1)^2} + \frac{x}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{-x-1+x}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

$$\text{Donc } \forall x \in]0; +\infty[: g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

3) Dresser son tableau de variation de g On a $\forall x \in]0; +\infty[: g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$ Donc la fonction g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
g'		-
g	$+\infty$	0

4) Montrer que : $\forall x \in [0; +\infty[; g(x) > 0$

$$\text{On a } g(]0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right[$$

$$=]0; +\infty[$$

Donc pour tout $x \in]0; +\infty[$ On a : $g(x) \in]0; +\infty[$ Donc $\forall x \in [0; +\infty[; g(x) > 0$

Exercice 07

Soit f la fonction numérique définie sur

$$[0, +\infty[\text{ par } \begin{cases} f(x) = x^4(\ln x - 1)^2 ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2)a) Montrer que

$$f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2 \ln x - 1) \text{ pour tout } x \text{ de l'intervalle }]0, +\infty[$$

b) Dresser le tableau de variation de f

Solution

Soit f la fonction numérique définie sur

$$[0, +\infty[\text{ par } \begin{cases} f(x) = x^4(\ln x - 1)^2 ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4(\ln x - 1)^2 = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

2)a) Montrer $f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2 \ln x - 1)$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$ On a la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ car c'est une composée et produit des fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ Soit $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^4(\ln x - 1)^2)' \\ &= 4x^3(\ln x - 1)^2 + 2x^4(\ln x - 1)'(\ln x - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3(\ln x - 1)^2 + 2x^4 \times \frac{1}{x}(\ln x - 1) \\ &= 4x^3(\ln x - 1)^2 + 2x^3(\ln x - 1) \\ &= 2x^3(\ln x - 1)(2(\ln x - 1) + 1) \\ &= 2x^3(\ln x - 1)(2 \ln x - 1) \end{aligned}$$

b) Dresser le tableau de variation de f Soit $x \in]0, +\infty[$ donc $2x^3 > 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3(\ln x - 1)(2 \ln x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) - 1 = 0 \text{ ou } 2 \ln(x) - 1 = 0$$

$$= 0 \text{ car } x \in]0, +\infty[$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = 1 \text{ ou } \ln(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = e \text{ ou } x = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = e \text{ ou } x = \sqrt{e}$$

x	0	$\sqrt{e}$	e	$+\infty$
$\ln(x) - 1$		0	+	+
$2\ln(x) - 1$		-	0	+
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$	0	$f(\sqrt{e})$	$f(e)$	$+\infty$

Exercice 08

Déterminer les primitives des fonctions :

a) $f(x) = \frac{x^5}{1+x^6} ; I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)} ; I =]0; 1[$

Solution

a) $f(x) = \frac{x^5}{1+x^6} = \frac{1}{6} \times \frac{6x^5}{1+x^6}$ de type $\frac{u'}{u}$

avec $u(x) = 1+x^6 \rightarrow u'(x) = 6x^5$

Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est de la forme $\ln(|u|)$

Donc : $F(x) = \frac{1}{6} \ln(1+x^6) + C ;$ avec $C \in \mathbb{R},$

b) $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$ de type $\frac{u'}{u}$

avec $u(x) = \ln(x) \rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est de la forme $\ln(|u|)$

Donc : $F(x) = \ln(|\ln(x)|) + C$ avec $C \in \mathbb{R},$

On a : $x \in]0; 1[$

Donc $\ln x < 0$ donc $|\ln(x)| = -\ln x$

Donc : $F(x) = \ln(-\ln x) + C .$

avec $C \in \mathbb{R}$