

Etude de fonction Logarithme Népérien 4:Etude des fonctions

Logarithme népérien 4 : Etude
des fonctions

Deuxième bac sciences
PC/SVT/ST

Fonction Logarithme
népérien 4 : Etude
des fonctions

Série corrigée 4 : Etude des fonctions Log-népérien

2 Bac sciences
PC/SVT/ST

Etude des fonctions

Exercice 01

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = 1 - x + \ln x$$

1) a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

2) Étudier la position relative de (C_f) et la droite : $y = -x$

3) Déterminer les variations de la fonction f

4) Étudier la convexité de la fonction f .

5) Tracer (D) et (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Exercice 02

A) Soit g une fonction définie sur

$$]0; +\infty[\text{ par } g(x) = x - \ln(x)$$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2) Calculer $g'(x)$; puis dresser le tableau des variations de g

3) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; \quad g(x) > 0$

B) f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et Interpréter le résultat géométrique

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

3) a) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point $A(1; 1)$

4) Montrer que f admet une fct réciproque f^{-1} , définie sur J que l'on précisera

5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$; (On prend

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -0,2$$

6) Tracer (T) et (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Exercice 03

I) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - x + x \ln x.$$

1) a) Montrer que $g'(x) = \ln x$; sur $]0; +\infty[$.

b) Montrer que la fonction g est décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

2) Calculer $g(1)$ et en déduire que : $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

II) Soit la fct f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x}$$

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et interpréter géométriquement

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ et en déduire la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrer que $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$ sur $]0; +\infty[$.

b) Interpréter géométriquement le résultat $f'(1) = 0$.

c) Montrer que la fonction f est croissante sur $]0; +\infty[$

4) Tracer (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (On prend $f(0,3) = 0$).

5) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|}$$

a) Montrer que la fonction h est paire et que $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

b) Construire, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C') représentant la fonction h

Exercice 04

Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$

1) a) Montrer que $D_f =]-2; 1[$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et interpréter les deux résultats géométriquement

2) a) Montrer que f est dérivable sur $] -2; 1[$

b) Déterminer le sens de variation de f

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -1, 0[$

4) Tracer la courbe représentative de f .

**Série corrigée 4 : Etude des
fonctions : Log-népérien**

**2 Bac sciences
PC/SVT/ST**

Etude des fonctions

Exercice 05

A) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 1 + x + \ln x$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2)a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$ et que

$$\frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}. \quad \left(\text{On prend } g\left(\frac{1}{5}\right) \cong -0,4 \right)$$

3) Dédurre le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$

B) Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{4x \ln x}{1+x}; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1)a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et

que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter graphiquement le résultat.

2)a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter le résultat géométrique

b) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$$

c) Dédurre que f est strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[0; \alpha]$

d) Montrer que $f(\alpha) = -4\alpha$ et dresser le tableau de variations de f

3)a) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$f''(x) = \frac{4(1 - x^2 - 2x \ln x)}{x(x+1)^3}$$

b) Etudier le signe de $1 - x^2$ et $-2x \ln x$ sur $]0; +\infty[$ et en déduire que le point d'abscisse 1 est l'unique point d'inflexion de (C_f) .

c) Donner l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1

4) Tracer (T) et (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
(on donne $\alpha \approx 0.25$)

C) Soit h la restriction de f sur $[\alpha; +\infty[$.

1) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie J

2) Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 puis Calculer $(h^{-1})'(0)$.

Exercice 6

A) Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

2) Montrer que $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ sur $]0; +\infty[$;

3) Dresser son tableau de variation sur $]0; +\infty[$;

4) Montrer que : $\forall x \in [0; +\infty[; \quad g(x) > 0$

B) Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$

$$f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right); \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

1) Montrer que f est continue à droite de 0

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, puis

interpréter le résultat géométriquement

3) Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite puis interpréter le résultat géométriquement

4)a) Montrer que f est dérivable sur $\in]0; +\infty[$ et que

$$\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = g(x)$$

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$

5) Etudier la convexité de la courbe (C_f)

6) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2 cm)

C) Soit (U_n) tel que : $U_0 = \frac{1}{e}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$

2) Montrer que la suite (U_n) est croissante

3) Dédurre que (U_n) est convergente et calculer la limite de (U_n)

Solution de l'exercice 1

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par
 $f(x) = 1 - x + \ln x$

1) a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter le
résultat géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x + \ln x = -\infty$$

Car : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

Donc la droite d'équation $x = 0$ c-à-dire l'axe
des abscisses est asymptote verticale à (Cf)

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis étudier
la branche infinie de (Cf) au voisinage de $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x + \ln x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x + \ln x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} \right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x + \ln(x) + x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \ln(x) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Donc la courbe (Cf) admet une branche
parabolique suivant la droite (Δ) d'équation
 $y = -x$ au voisinage de $+\infty$

2) Étudier la position relative de (Cf) et la
droite : (Δ): $y = -x$

$$\begin{aligned} f(x) - (-x) &= 1 - x + \ln(x) + x \\ &= 1 + \ln(x) \end{aligned}$$

Cherchons le signe de $1 + \ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$
 $1 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1$

$$\Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f(x) + x$	1	0	+
Position relative	(Cf) est en dessous de (Δ)	$A\left(\frac{1}{e}; -\frac{1}{e}\right)$ Point d'intersection	(Cf) est en dessus de (Δ)

3) Déterminer les variations de la fonction f
Sur $]0 ; +\infty[$ f est dérivable et, on a :

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x}$$

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - x$
La fonction f est donc strictement croissante
sur $]0 ; 1]$ et strictement décroissante sur
 $[1 ; +\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

➤ $f(2) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$

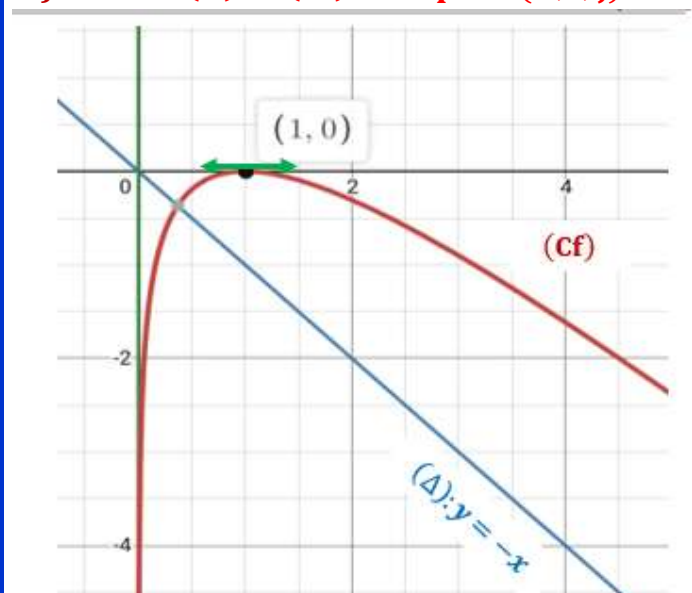
4) Étudier la convexité de la fonction f .

Sur $]0 ; +\infty[$, on a f' est dérivable de plus :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-1 \times x - (1 - x) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{-x - 1 + x}{x^2} = \frac{-1}{x^2} < 0 \end{aligned}$$

On en déduit que (Cf) la courbe de f est
concave sur $]0 ; +\infty[$.

5) Tracer (D) et (Cf) le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$



Solution de l'exercice 2

A) Soit g une fonction définie sur

$]0; +\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x)$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \ln(x) = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

2) Calculer $g'(x)$; puis dresser le tableau des variations de g

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Comme $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $x - 1$.

On a $g(1) = 1 - \ln 1 = 1$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	 	- 0 +	
$g(x)$	 $+\infty$	1	$+\infty$

3) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) > 0$

On en déduit que pour tout x de $]0; +\infty[$, on a 1 est une valeur minimale de g sur $]0; +\infty[$

Donc $g(x) = x - \ln x \geq 1 > 0$

donc $g(x) > 0$

B) f une fonction définie sur $]0; +\infty[$;

par $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et Interpréter le résultat géométrique

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(x) + 1 + \ln(x)}{x} = -\infty \end{aligned}$$

Car : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$

Donc la droite d'équation $x = 0$ c-à-dire l'axe des abscisses est asymptote verticale à (Cf)

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de (Cf) au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$= 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$

Donc la courbe (Cf) admet une branche parabolique suivant l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

3)a) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme des fonctions dérivable sur $]0; +\infty[$

Rappel : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{x - 1 + 1 - \ln(x)}{x^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{x - \ln(x)}{x^2}$$

$$= \frac{g(x)}{x^2}$$

b) Dresser le tableau de variation de f

On a : $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ et $\forall x \in]0; +\infty[: g(x) > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

On dresse le tableau de variations de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$+\infty$

$-\infty$ 

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point A(1 ; 1)

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = 1 \times (x - 1) + 1$$

$$(T): y = x$$

4) Montrer que f admet une fct réciproque f^{-1} , définie sur J que l'on précisera

- f est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc elle est continue sur $]0, +\infty[$
- La fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

Donc f admet une fct réciproque f^{-1} , définie sur $J = f(]0, +\infty[)$

$$=]\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]-\infty, +\infty[$$

5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]\frac{1}{2}, 1[$; (On prend

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -0,2)$$

- La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ en particulier $]\frac{1}{2}, 1[$
- La fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ on particulier sur $]\frac{1}{2}, 1[$
- Et on a $f(1) = 1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = -0,2$
- Donc $f(1) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]\frac{1}{2}, 1[$

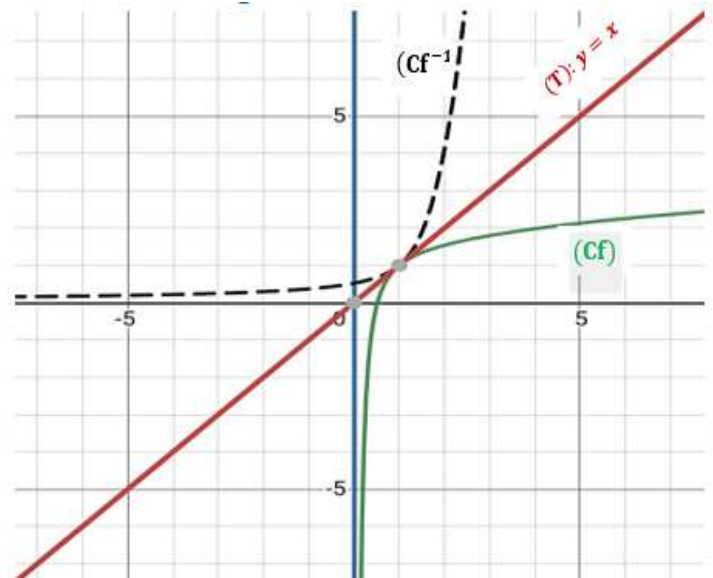
6) Tracer (T) et (Cf) et (Cf^{-1}) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

On a (Cf) et (Cf^{-1}) sont symétrique par rapport à la droite (T): $y = x$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptotes verticale à (Cf) La droite d'équation $y = 0$ est asymptotes horizontale à (Cf^{-1})

La courbe (Cf) admet une branche parabolique suivant l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

Donc la courbe (Cf^{-1}) admet une branche parabolique suivant l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$



Solution de l'exercice 3

1) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - x + x \ln x.$$

1) a) Montrer que $g'(x) = \ln x$; sur $]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (1 - x + x \ln x)' = -1 + x' \ln x + x(\ln x)' \\ &= -1 + \ln x + x \times \frac{1}{x} = -1 + \ln x + 1 = \ln x \end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in]0; +\infty[; g'(x) = \ln x$

b) Montrons que g est décroissante sur $]0; 1[$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

Le signe de $g'(x)$ c'est le signe de $\ln x$, et puisque $\forall x \in]0; 1[; \ln x \leq 0$;

Alors $\forall x \in]0; 1[; g'(x) \leq 0$

Donc g est décroissante sur $]0; 1[$

et puisque $\forall x \in [1; +\infty[; \ln x \geq 0$;

Alors $\forall x \in [1; +\infty[; g'(x) \geq 0$

Donc g croissante sur $[1; +\infty[$.

2 - Calculons $g(1)$ et déduisons que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

$g(1) = 1 - 1 + 1 \times \ln 1 = 1 - 1 + 1 \times 0 = 0$ et puisque g admet un minimum au 1 ;

Alors $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) \geq g(1)$

Donc : $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) \geq 0$.

II) Soit la fct f définie sur $]0; +\infty[$ par:

$$f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}$$

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et interpréter géométriquement

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 - 1 - 2x\ln x}{x^2} = -\infty \end{aligned}$$

(Car : $\lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 - 1 = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x\ln x = 0$)

Et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Interprétation géométrique :

la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe (C).

2 - Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ et déduisons la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x} = 3 \\ \text{(Car: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} &= 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{)} \end{aligned}$$

Interprétation géométrique :

la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

3 - a) Montrons que $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x} \right)' \\ &= \frac{2x}{x^4} - 2 \frac{(\ln x)'x - (\ln x)x'}{x^2} \\ &= \frac{2}{x^3} - 2 \frac{(1 - \ln x)}{x^2} \\ &= \frac{2}{x^3} - \frac{2 - 2\ln x}{x^2} \\ &= \frac{2 - 2x + 2x\ln x}{x^3} \\ &= \frac{2(1 - x + x\ln x)}{x^3} \\ &= \frac{2g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

b) Interprétation géométrique du résultat $f'(1) = 0$.

On a $f'(1) = \frac{2g(1)}{1} = 0$ et comme $f(1) = 2$,

Donc : (C_f) admet une tangente horizontale (T) au point (1, 2).

c) Montrons que la fonction f est croissante sur $]0; +\infty[$.

On a : $\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$.

Soit x de $]0; +\infty[$, on a $x^3 > 0$.

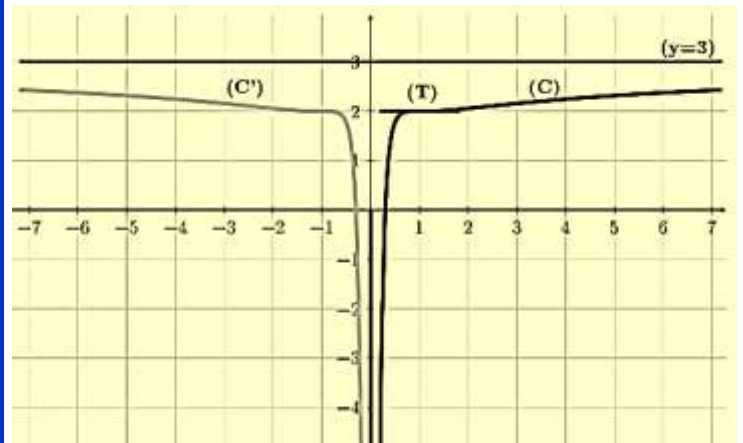
et d'après la question 2) partie I,

On a : $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) \geq 0$.

Donc $\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) \geq 0$.

Donc : la fonction f est croissante sur $]0; +\infty[$.

4 - Construisons, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C). (On prendra $f(0,3) = 0$)



6 - Soit h la fonction numérique définie sur

$\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|}$.

a) Montrons que la fonction h est paire et que $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

Montrons que la fonction h est paire :

On a $D_h = \mathbb{R}^*$,

Donc pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a $-x \in \mathbb{R}^*$.

Soit x de $\mathbb{R}^*$. On a :

$$\begin{aligned} h(-x) &= 3 - \frac{1}{(-x)^2} - \frac{\ln((-x)^2)}{|-x|} \\ &= 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

Alors $h(-x) = h(x)$ pour tout x de D_h . Donc la fonction h est paire

Montrons que $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$:

Soit x de $]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} h(x) &= 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|} \\ &= 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln(x)}{x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Car : $\forall x \in]0; +\infty[; |x| = x$ et $\ln(x^2) = 2\ln(x)$.

Donc $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$

b) Construisons, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C') représentant la fonction h .

On a : $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$,

Donc la courbe (C') c'est la courbe (C) sur $]0; +\infty[$.

Et on a la fonction h est paire, alors sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées . (voir le figure)

Solution de l'exercice 4

Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$

1)a) Montrer que $D_f =]-2; 1[$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \frac{x+2}{1-x} > 0$$

On dresse le tableau de signe de $\frac{x+2}{1-x}$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+
$1-x$	+	+	0	-
$\frac{x+2}{1-x}$	-	0	+	-

Donc $D_f =]-2; 1[$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et interpréter

les deux résultats géométriquement

Par composition de limites, on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{x+2}{1-x} = 0^+ \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x+2}{1-x} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

La courbe de fonction f admet deux asymptotes verticales d'équations : $x = -2$ et $x = 1$.

2)a) Montrer que f est dérivable sur $] -2 ; 1[$

La fonction $u: x \mapsto \frac{x+2}{1-x}$ est dérivable et strictement positive sur $] -2 ; 1[$

Donc la fonction f est dérivable sur $] -2 ; 1[$

b) Déterminer le sens de variation de f

Soit : $] -2 ; 1[$

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1 \times (1-x) - (x+2) \times (-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1-x+x+2}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{3}{(1-x)^2}}{\frac{x+2}{1-x}}$$

u est strictement positive sur $] -2 ; 1[$ et $\frac{3}{(1-x)^2} > 0$. donc $f'(x) > 0$.

Et donc la fonction f est strictement croissante sur $] -2 ; 1[$.

x	-2	1
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -1, 0[$

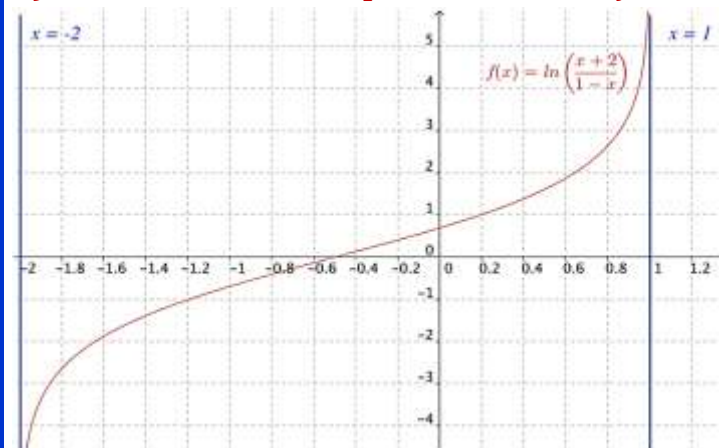
➤ La fonction f est continue sur $] -2 ; 1[$ en particulier $[-1, 0]$

➤ La fonction f est strictement croissante sur $] -2 ; 1[$ on particulier sur $[-1, 0]$

➤ Et on a $f(-1) = -\ln 2$ et $f(0) = \ln 2$ donc $f(-1) \times f(0) < 0$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -1, 0[$

4) Tracer sa courbe représentative de f .



Solution de l'exercice 5

A) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 + x + \ln x$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x + \ln x = -\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x + \ln x = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

2)a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ et on a ;

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$$

g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$ et que

$$\frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2} \quad (\text{On donne } g\left(\frac{1}{5}\right) \cong -0,4)$$

On a g est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc elle est continue sur $]0; +\infty[$

Et on a g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$$\text{De plus } g(]0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[=]-\infty; +\infty[$$

Donc $0 \in g(]0; +\infty[)$

D'où l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$

Vérifions que $\frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$

On a g est continue sur $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right]$

Et g est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right]$

$$\begin{aligned} \text{ET: } g\left(\frac{1}{5}\right) &= -0,4 \text{ et } g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{2} \\ &= \ln(e) - \ln 2 + \frac{1}{2} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } g\left(\frac{1}{5}\right) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$$

3) Dédire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$

On distingue deux cas ; $x \in]0; \alpha]$ et $x \in [\alpha; +\infty[$

Soit : $x \in]0; \alpha]$

$$x \in]0; \alpha] \Rightarrow x$$

$\leq \alpha$ et g est str croissante sur $]0; \alpha]$

$$\Rightarrow g(x) \leq g(\alpha)$$

$$\Rightarrow g(x) \leq 0$$

Soit : $x \in [\alpha; +\infty[$

$$x \in [\alpha; +\infty[\Rightarrow \alpha$$

$\leq x$ et g est str croissante sur $[\alpha; +\infty[$

$$\Rightarrow g(\alpha) \leq g(x)$$

$$\Rightarrow 0 \leq g(x)$$

On dresse le tableau de signe de g sur $]0; +\infty[$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

B) Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{4x \ln x}{1+x} ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (unité 2cm)

1)a) Montrer que f est continue à droite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x \ln x}{1+x} = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x = 1$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Donc f est continue à droite de 0.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et

que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter graphiquement le résultat.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x \ln x}{1+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x \ln x}{x\left(\frac{1}{x} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{\frac{1}{x} + 1} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4x \ln x}{1+x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x \ln x}{x(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{1+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{x(\frac{1}{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{x} \times \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} = 0\end{aligned}$$

Car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Interprétation géométrique :

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

Donc la courbe (Cf) admet une branche parabolique suivant l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2)a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter le résultat géom

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{4x \ln x}{1+x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \ln x}{1+x} \\ &= -\infty\end{aligned}$$

Car : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1+x = 1$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométrique :

la courbe (Cf) admet une demi tangente verticale au point A(0 ;0) dirigée vers le bas

b) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$$

On la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivable sur $]0; +\infty[$

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $(uv)' = u'v + uv'$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(4 \ln x + 4x \times \frac{1}{x})(x+1) - (4x \ln x \times 1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(4 \ln x + 4)(x+1) - 4x \ln x}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{(4 \ln x + 4)(x+1) - 4x \ln x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x \ln x + 4 \ln x + 4x + 4 - 4x \ln x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4 \ln x + 4x + 4}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(\ln x + x + 1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$$

D'où pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$

c) Dédire que f est strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[0; \alpha]$

On a : pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$

et $(x+1)^2 > 0$

Donc le signe de f' est le signe de g sur $]0; +\infty[$

Et on a d'après la partie A) le signe de g sur $]0; +\infty[$

x	0	α	$-\infty$
$g(x)$	-	0	+

Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[0; \alpha]$

d) Montrons que $f(\alpha) = -4\alpha$

On a : $f(\alpha) = \frac{4\alpha \ln \alpha}{1 + \alpha}$

Et d'après la partie A) le α est solution de l'équation $g(x) = 0$

Donc $g(\alpha) = 0$ donc $1 + \alpha + \ln(\alpha) = 0$
donc $1 + \alpha = -\ln(\alpha)$

Donc : $f(\alpha) = \frac{4\alpha \ln \alpha}{1 + \alpha} = \frac{4\alpha \ln \alpha}{-\ln(\alpha)} = -4\alpha$

On dresse le tableau de variations de f

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	-4α	$+\infty$

3)a) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$f''(x) = \frac{4(1-x^2-2x\ln x)}{x(x+1)^3}$

Rappels : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
 $(u^n)' = nu' u^{n-1}$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

On a : $f'(x) = \frac{4(\ln x + x + 1)}{(x+1)^2}$

Donc :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{4\left(\frac{1}{x} + 1\right)(x+1)^2 - 4(\ln x + x + 1) \times 2 \times 1 \times (x+1)^1}{(x+1)^4} \\ &= \frac{4\left(\frac{1}{x} + 1\right)(x+1)^2 - 8(\ln x + x + 1)(x+1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{4\left(\frac{1}{x} + 1\right)(x+1) - 8(\ln x + x + 1)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{\frac{4(1+x)^2}{x} - 4\left(\frac{2x \ln x + 2x^2 + 2x}{x}\right)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{4[x^2 + 2x + 1 - (2x \ln x + 2x^2 + 2x)]}{x(x+1)^3} \end{aligned}$$

Donc : $f''(x)$

$$= \frac{4[x^2 + 2x + 1 - 2x \ln x - 2x^2 - 2x]}{x(x+1)^3}$$

Donc : $f''(x) = \frac{4(1-x^2-2x\ln x)}{x(x+1)^3}$

b) Etudier le signe de $1 - x^2$ et $-2x \ln x$ sur $]0; +\infty[$ et en déduire que le point d'abscisse 1 est l'unique point d'inflexion de (C_f) .

Il est clair que le signe de f'' dépend de signe de $1 - x^2 - 2x \ln x$

1ère méthode

On a : $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

Et on a : $-2x \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

on dresse le tableau de signe de $1 - x^2$ et $-2x \ln x$ sur $]0; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$1 - x^2$	+	0	-
$-2x \ln x$	+	0	-

Soit $x \in]0; 1[$

Donc $1 - x^2 - 2x \ln x \geq 0$

Donc $f''(x) \geq 0$

Soit $x \in [1; +\infty[$

Donc $1 - x^2 - 2x \ln x \leq 0$

Donc $f''(x) \leq 0$

D'où la fonction f'' s'annule et change de signe en 1

Donc le point d'abscisse 1 est l'unique point d'inflexion de (C_f) .

2ème méthode

$x \in]0; 1[\Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow 1 - x^2 \geq 0$

$x \in]0; 1[\Rightarrow -2x \leq 0$ et $\ln(x) \leq 0 \Rightarrow -2x \ln x \geq 0$

Donc $\forall x \in]0; 1[: 1 - x^2 - 2x \ln x \geq 0$

$x \in [1; +\infty[\Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow 1 - x^2 \leq 0$

$x \in [1; +\infty[\Rightarrow -2x \leq 0$ et $\ln(x) \geq 0 \Rightarrow -2x \ln x \leq 0$

Donc $\forall x \in [1; +\infty[: 1 - x^2 - 2x \ln x \leq 0$

D'où la fonction f'' s'annule et change de signe en 1

c) Donner l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1

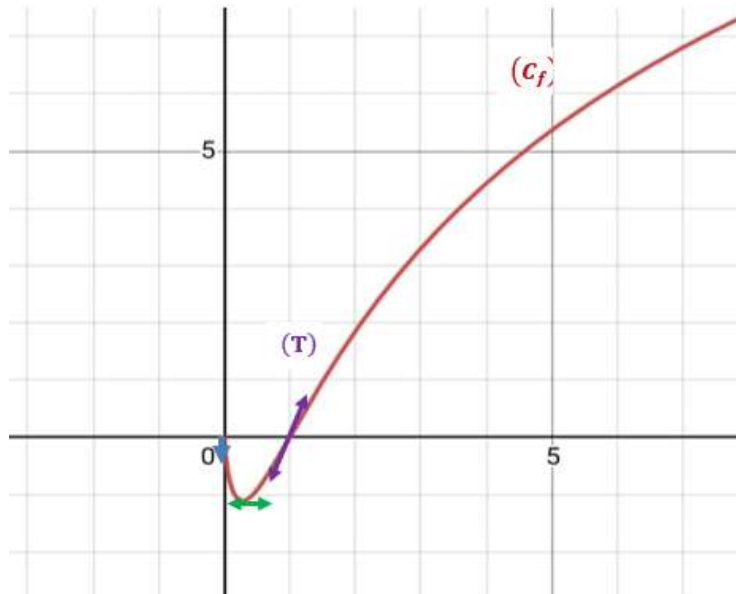
$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$y = 2 \times (x - 1) + 0$,

Donc $(T): y = 2x - 2$

4) Tracer (T) et (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (on donne $\alpha \approx 0.25$)

On a $\alpha \approx 0.25$ donc $f(\alpha) = -4\alpha \approx -1$



C) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.

Donc $\forall x \in [\alpha; +\infty[: h(x) = f(x)$

1) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie J à déterminer

➤ **f est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc elle est continue sur $]0, +\infty[$**

On particulier sur $[\alpha; +\infty[$ donc h est continue sur $[\alpha; +\infty[$.

➤ **La fonction f est strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$**

Donc la fonction h est str croissante sur $[\alpha, +\infty[$

Donc f admet une fct réciproque f^{-1} , définie sur $J = h([\alpha; +\infty[)$

$$J = h([\alpha; +\infty[) = [h(\alpha); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)[$$

2) Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 puis Calculer $(h^{-1})'(0)$.

On a : $h(1) = 0$ donc $h^{-1}(0) = 1$

La fonction h est dérivable en 1 et on a : $h'(1) = 2 \neq 0$

Donc la fonction h^{-1} est dérivable en 0 et :

$$(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'(1)} = \frac{1}{2}$$

A) Soit g une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = 0$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(1) = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

2) Montrer que $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ sur $]0; +\infty[$;

Rappels :

$$[\ln(u)]' = \frac{u'}{u} \text{ et } \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \text{ et } \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$g'(x) = -\frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} - \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{\frac{1}{x}}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{(x+1)}{x(x+1)^2} + \frac{x}{x(x+1)^2} = \frac{-x-1+x}{x(x+1)^2}$$

Donc $\forall x \in]0, +\infty[: g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$

3) Dresser son tableau de variation sur $]0; +\infty[$;

On a $\forall x \in]0, +\infty[: g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$

Donc la fonction g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

x	0	$+\infty$
g'	$-$	
g	$+\infty$	0

4) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) > 0$

$$\text{On a } g(]0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right[\\ =]0; +\infty[$$

Donc pour tout $x \in]0; +\infty[$

On a : $g(x) \in]0; +\infty[$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) > 0$

B) Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$

$f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$; si $x > 0$ et $f(0) = 0$

1) Montrer que f est continue en 0 à droite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x+1) - x \ln(x) = 0$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x+1) = 0 \times \ln(1) = 0$ et

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

D'où f est continue à droite de 0

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, puis

interpréter le résultat géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

On pose $X = \frac{1}{x}$ donc $x = \frac{1}{X}$

Or $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} \ln(1+X) \\ = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Interprétation géométrique :

La droite (D) d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à (Cf) au voisinage de $+\infty$

3) Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite puis interpréter le résultat géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométrique :

(Cf) la courbe de la fonction f admet une demi-tangente verticale en 0 dirigée vers le haut

4)a) Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = g(x)$

Montrons que f est dérivable sur $]0; +\infty[$

- La fonction $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ car c'est une fonction rationnelle elle toujours dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition qui est $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
- Donc La fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$
- La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$; (Polynôme)
- Donc la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$

Rappels :

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{et} \quad [\ln(u)]' \\ = \frac{u'}{u} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$f'(x) = 1 \times \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x \times \frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \\ = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = g(x)$

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$

On a : $\forall x \in]0; +\infty[: g(x) > 0$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
f'	-	
f	0	1

5) Etudier la convexité de la courbe (Cf)

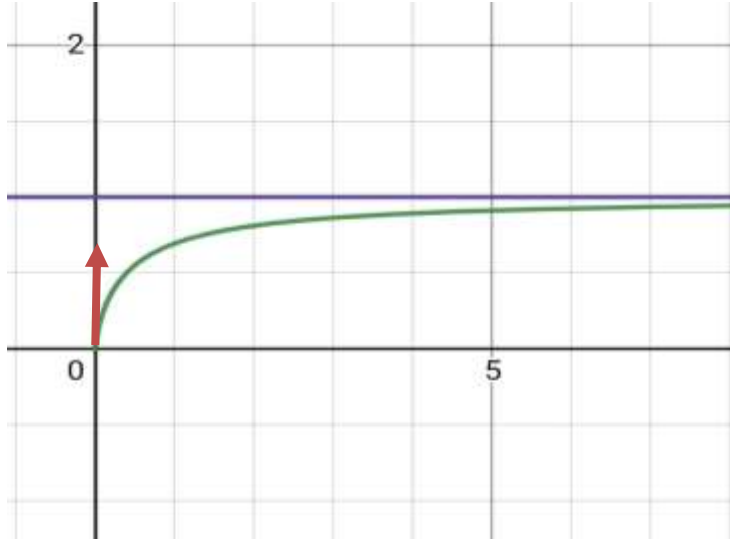
5) On a $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = g(x)$

Donc $\forall x \in]0, +\infty[: f''(x) = g'(x)$

Donc $\forall x \in]0, +\infty[: f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$

Donc la courbe (Cf) est concave sur $]0, +\infty[$

6) Tracer (Cf) dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$



C) Soit (U_n) tel que : $U_0 = \frac{1}{e}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$

➤ Pour $n=0$ on a $1 \leq u_0 = \frac{1}{e} \leq \frac{1}{e-1}$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$

➤ Supposons que $0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$ et montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{e-1}$.

f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; \frac{1}{e-1}]$

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{e-1} \Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{e-1}\right)$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{e-1}$$

➤ Car ; $f\left(\frac{1}{e-1}\right) = \frac{1}{e-1} \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{e-1}}\right)$

$$= \frac{1}{e-1} \ln(1 + e - 1) = \frac{1}{e-1}$$

D'après le principe de récurrence, on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$$

2) Montrer que la suite (U_n) est croissante

$$u_{n+1} - u_n = u_n \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) - u_n$$

$$= u_n \left(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) - 1 \right)$$

$$0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1} \Rightarrow \frac{1}{u_n} \geq e - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n} + 1 \geq e \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_n} + 1\right) \geq 1$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_n} + 1\right) - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow u_n \left(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) - 1 \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0 \Rightarrow \text{la suite}$$

(u_n) est croissante

3) Dédire que (U_n) est convergente et calculer la limite de (U_n)

- (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{e-1}$ donc convergente.
- f est continue sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{e-1}\right]$ car elle est dérivable sur I
- $f\left(\left[0; \frac{1}{e-1}\right]\right) = \left[f(0); f\left(\frac{1}{e-1}\right)\right]$
 $= \left[0; \frac{1}{e-1}\right] \subset \left[0; \frac{1}{e-1}\right]$
- $u_0 = \frac{1}{e} \in \left[0; \frac{1}{e-1}\right]$

Alors la limite de (u_n) est L la solution de l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow x$$

$$= 0 \text{ ou } \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1 + \frac{1}{x} = e \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x$$

$$= \frac{1}{e-1}$$

Et on a la suite (u_n) est croissante donc la limite est $\frac{1}{e-1}$