

Correction des examens nationaux Logarithme Népérien

Correction des examens
nationaux logarithme népérien
Deuxième bac sciences
PC/SVT/ST

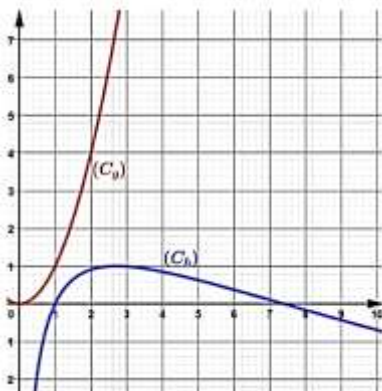
Correction d'examens
nationaux de 2025 à 2008
Logarithme népérien 5

Examen national 2025 session normale

Partie I:

Le graphique représente les courbes (C_g) et (C_h) des fonctions

$g: x \mapsto x^2$ et
 $h: x \mapsto 2(\ln x) - (\ln x)^2$
sur $]0, +\infty[$ dans un même repère orthonormé.



1)a) Justifier graphiquement que pour tout x de $]0, +\infty[$: $g(x) - h(x) > 0$

b) Dédire que pour tout x de

$$]0, +\infty[: \frac{2(\ln x) - (\ln x)^2}{x^2} < 1.$$

2) a) Vérifier que la fonction $H: x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$,

b) Résoudre sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation $h(x) = 0$ et en déduire les deux points d'intersection de la courbe (C_h) avec l'axe des abscisses.

Partie II:

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{(\ln x)^2}{x}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1)a) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (On peut poser $t = \sqrt{x}$), puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c) Dédire que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

2)a) Montrer que pour tout x de

$$]0, +\infty[, f'(x) = 1 - \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}.$$

b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

(On peut utiliser la question Partie 1-1-b)

3)a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$.

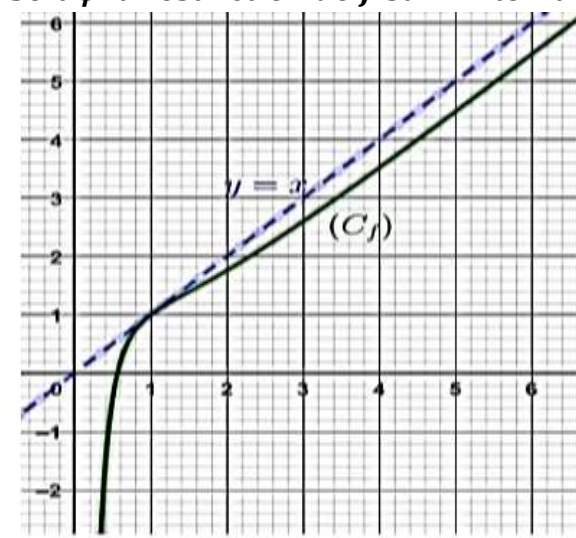
b) Vérifier que $e^{-1} < \alpha < 1$ et montrer que $\ln(\alpha) = -\alpha$.

c) Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

d) Montrer que $y = x$ est l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1

4) Le graphique représente la courbe (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Soit φ la restriction de f sur l'intervalle $]0, 1]$.



a) Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que φ^{-1} est dérivable en 0 et que

$$(\varphi^{-1})'(0) = \frac{\alpha}{2 + 2\alpha}$$

c) Recopier la courbe de φ et construire la courbe de φ^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Partie III:

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que $1 < u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2)a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On utilise la question Partie II-3-c)

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Examen national 2023 session normale

Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$

par $f(x) = 2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2$

Et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1cm)

1) a) Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f(x) = \frac{3x - 2 + 2x \ln x + x(\ln x)^2}{x}$$

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ puis

interpréter géométriquement le résultat

d) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$

2) Montrer que $f'(x) = \frac{2(1-x+x \ln x)}{x^2}$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$

3) En exploitant le tableau de variation ci-dessous, de la fonction dérivée f' de f sur $]0, +\infty[$

x	0	1	β	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		$f'(\beta)$	0

(On donne $\beta \approx 4.9$)

a) Prouver que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f

b) Donner le tableau de signe de la dérivée seconde f'' de la fonction f sur $]0, +\infty[$

c) En déduire la concavité de $(\mathcal{C})$ en précisant les abscisses de ses deux points d'inflexions

4) La courbe $(\mathcal{C}_g)$

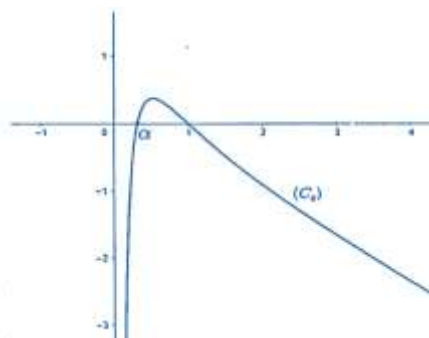
ci-contre est la représentation graphique de la fonction

$g: x \mapsto f(x) - x$ et qui s'annule en α et 1 ($\alpha \approx 0,3$)

Soit (Δ) la droite d'équation $y=x$

a) A partir de la courbe $(\mathcal{C}_g)$, déterminer le signe de la fonction g sur $]0, +\infty[$

b) Déduire que la droite (Δ) est en dessous de $(\mathcal{C})$ sur l'intervalle $[\alpha; 1]$ et au-dessus de $(\mathcal{C})$ sur les intervalles $]0, \alpha[$ et $[1; +\infty[$



c) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ et (Δ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on prend : $\alpha \approx 0,3$ et $f(\beta) \approx 1,9$)

d) Vérifier que $x \mapsto 2x - x \ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto 1 - \ln(x)$ sur $[1; \alpha]$

5) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 \in]\alpha; 1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a) Montrer par récurrence que $\alpha < u_n < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante (On peut utiliser la question 4)b))

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite

Examen national 2022 session rattrapage

Soit f la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$

par
$$\begin{cases} f(x) = x^4(\ln x - 1)^2; & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1cm)

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis déterminer la

branche infinie de $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$

2)a) Montrer que f est continue à droite en 0

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement

3) a) Montrer que

$f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2 \ln x - 1)$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$

b) Dresser le tableau de variation de f

4)a) Sachant que $f''(x) = 2x^2(6 \ln x - 5) \ln x$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$, étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0, +\infty[$

b) Déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses

5)a) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on prend : $\sqrt{e} \approx 1,6$ et $e^2 \approx 7,2$)

b) En utilisant la courbe $(\mathcal{C})$, déterminer le nombre de solutions de l'équation

$$x^2(\ln x - 1) = -1$$

6) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|)$

a) Montrer que la fonction g est pair

b) Construire $(\mathcal{C}_g)$ la courbe représentative de g dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Examen national 2021 session normale

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :
 $f(0) = 0$ et $f(x) = 2x \ln(x) - 2x$ si $x > 0$
Et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité: 1cm)

- 1) Montrer que f est continue à droite au point 0
- 2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat
- 3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat
b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$
c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$
- 4) a) Résoudre dans l'intervalle $]0, +\infty[$ les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = x$
b) Construire et $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prend $e^{\frac{3}{2}} = 4.5$
- 5) a) Déterminer le minimum de f sur $]0, +\infty[$
b) En déduire pour tout x de $]0, +\infty[$ que $\ln(x) \geq \frac{x-1}{x}$
- 6) Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1, +\infty[$
a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.
b) Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction g^{-1}
- 7) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x) = x^3 + 3x & ; x \leq 0 \\ h(x) = 2x \ln(x) - 2x & ; x > 0 \end{cases}$$
 - a) Étudier la continuité de h au point 0
 - b) Étudier la dérivabilité de la fonction h à gauche au point 0 puis interpréter géométriquement le résultat.
 - c) La fonction h est-elle dérivable au point 0? justifier.

Examen national 2021 session rattrapage

On considère la fonction numérique h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = x + \ln x$

- 1) Montrer que h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
- 2) Déterminer $h([0; +\infty[)$
- 3) Dédire que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$
- 4) Démontrer que $0 < \alpha < 1$
- 5) a) Vérifier que $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$
b) Dédire que $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) > 2$

Examen national 2020 session normale

On considère la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln(x)$

- 1) a) Montrer pour tout x de $]0, +\infty[$ que $g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$
b) Montrer que g est croissante sur $]1, +\infty[$
c) En déduire pour tout x de $[1, +\infty[$ que $0 \leq \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$
(Remarquer que $2\sqrt{x} - 2 < 2\sqrt{x}$)
d) Montrer pour tout x de $[1, +\infty[$ que $0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$
- 2) Montrer que $G: x \mapsto x\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln(x)\right)$ est une primitive de g sur $]0, +\infty[$

Examen national 2019 session normale

Première partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par ; $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

Et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter ce résultat géométriquement.
- 2) a) vérifie que pour tout x de $]0; +\infty[$ $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x$
b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

c) Montrer que pour tous x de $]0; +\infty[$:

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 \text{ puis en déduire que}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

d) Montrer que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y = x$.

3.a) Vérifier que pour tout x de $]0; 1]$:

$$(x-1) + \ln x \leq 0 \text{ et que pour tout } x \text{ de } [1; +\infty[: (x-1) + \ln x \geq 0.$$

b) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$$

c) Dresser le tableau de variations de f .

4. a) Montrer que $f''(x) = \frac{2-\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

b) En déduire que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

5. a) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$

$$f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2 \text{ et déduire la position relative de (C) et } (\Delta).$$

b) Construire (Δ) et (C) dans le même repère ($O; \vec{i}; \vec{j}$).

6. a) Montrer que la fonction $H : x \mapsto \ln x - x$ est une primitive de $h : x \mapsto \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

Deuxième partie :

Soit (u_n) une suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1.a) Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2. Calculer la limite de la suite (u_n) .

Examen national 2018 session rattrapage

I) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - 1 - 2\ln^2 x + 2\ln x$$

Le tableau ci-contre

est le tableau de variations de la fonction g sur $]0; +\infty[$

1) Calculer $g(1)$

2) A partir de ce tableau, déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
g	$-\infty$	$+\infty$

II) On considère la fonction f définie sur

$$\text{l'intervalle }]0; +\infty[\text{ par : } f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé ($O; \vec{i}; \vec{j}$)

1) a) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

c) Déterminer la position relative de la droite (D) et de la courbe (C)

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat.

3) a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$

b) Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$

4) Construire dans le repère ($O; \vec{i}; \vec{j}$) la droite (D) et la courbe (C) (unité : 1 cm)

III) On considère la fonction numérique h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - x$

1) a) Vérifier que $h(1) = 0$

b) Dans la figure ci-contre (C_h) est la représentation graphique de h

Déterminer le signe de $h(x)$ sur chacun des intervalles $]0, 1]$

et $[1, +\infty[$ et déduire que $f(x) \leq x$ pour tout x de $[1, +\infty[$

2) On considère la suite (u_n) définie par :

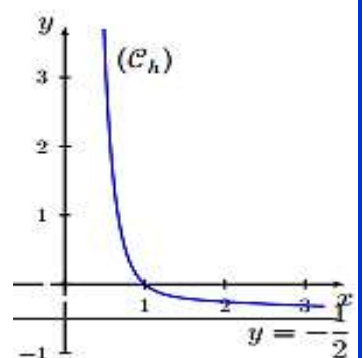
$$u_0 = e \text{ et } u_{n+1} = f(u_n)$$

pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on pourra utiliser les résultats de la question III)1)b))

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite



Examen national 2017 session normale

Partie I : On considère la fonction g définie sur

$]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2 \ln x$

1. Calculer $g(1)$

2. En partant du tableau de variation de g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$-\infty$

Montrer que :

$g(x) \leq 0$ Pour tout x de $]0, 1]$

$g(x) \geq 0$ Pour tout x de $[1, +\infty[$

Partie II : On considère la fonction f définie sur

$]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$

(C_f) Est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 1cm

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

2.a. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2.b. Montrer que (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite $(D) : y = x$ en $+\infty$

3.a. Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$

3.b. Etudier les variations de f sur $]0, +\infty[$

3.c. Dresser son tableau de variation sur $]0, +\infty[$.

4.a. Résoudre dans l'intervalle $]0, +\infty[$, l'équation $\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0$

4.b. En déduire que la courbe (C_f) coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées.

4.c. Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1, 2]$, en déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D) sur $[1, 2]$

5. Tracer sur le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la droite (D) et la courbe C_f .

Partie III : On considère la suite (U_n) définie par

$U_0 = \sqrt{3}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$1 \leq U_n \leq 2$.

2. Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

3. En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Examen national 2016 session rattrapage

I) Soit g la fonction numérique définie sur

$]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2}{x} - 1 + 2 \ln(x)$.

Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction g sur

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(1)$	$+\infty$

$]0; +\infty[$.

1) Calculer $g(1)$.

2) Déduire à partir du tableau que :

$g(x) > 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$

II) On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 3 - 3x + 2(x + 1) \ln(x)$.

et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2cm).

1. a) Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ et donner une

interprétation géométrique à ce résultat.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

2.a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (pour calculer cette limite on pourra écrire $f(x)$ sous forme $f(x) = x \left[\frac{3}{x} - 3 + 2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(x) \right]$.)

b) Montrer que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3.a) Montrer : $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

4.a) Montrer que $I(1; 0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f) .

b) Montrer que : $y = x - 1$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point I.

c) Tracer dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la droite (T) et la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

6) Résoudre graphiquement l'inéquation :

$(x + 1) \ln(x) \geq \frac{3}{2}(x - 1)$, $x \in]0; +\infty[$

Examen national 2015 session rattrapage

I) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - x + x \ln x.$$

1) a) Montrer que $g'(x) = \ln x$; sur $]0; +\infty[$.

b) Montrer que la fonction g est décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

2) Calculer $g(1)$ et en déduire que :

$$g(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \text{ de }]0; +\infty[.$$

II) Soit la fct f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x}$$

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et interpréter géométriquement

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ et en déduire la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrer que $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$ sur $]0; +\infty[$.

b) Interpréter géométriquement le résultat $f'(1) = 0$.

c) Montrer que la fonction f est croissante sur $]0; +\infty[$

4) Tracer (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(On prend $f(0,3) = 0$).

5) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|}$$

a) Montrer que la fonction h est paire et que $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

b) Construire, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C') représentant la fonction h

Examen national 2015 session Annulé

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$

et (C_f) est la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

Partie I

1) Montrer que $D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$

2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique des résultats.

b) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis en déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote au voisinage de $+\infty$

c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat

3) a) Montrer que : $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ pour tout x de D_f

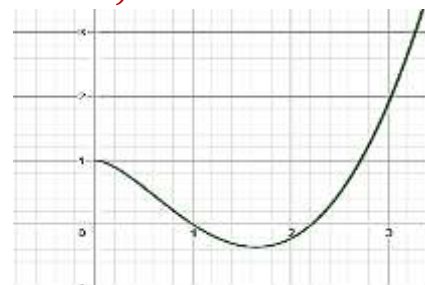
b) Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, e[$ et sur $]e, +\infty[$

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f

Partie II

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$

(C_g) est la courbe représentative de g dans un repère orthonormé (voir figure)



1) a) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $(E): x \in]0, +\infty[; g(x) = 0$

b) On donne le tableau de valeurs :

x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	-0,14	-0,02	0,12	0,28

2) a) Montrer que $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ pour tout x de D_f .

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ coupe la courbe (C_f) en deux points d'abscisses respectives 1 et α .

c) A partir de la courbe (C_g) , déterminer le signe de g sur $[1; \alpha]$ et montrer que $f(x) - x \leq 0$ pour tout x de $[1; \alpha]$

3) Construire dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C_f) et la droite (Δ)

Partie III :

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} ; 1 < U_n < \alpha$

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

3) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Examen national 2014 session normale

I- Soit g la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$

1) Montrer que $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$ et en déduire que la fonction g est croissante sur $]0, +\infty[$.

2) Vérifier que $g(1) = 0$ puis en déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout x de $]0, 1]$ et que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $[1, +\infty[$.

II) On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$$

soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité 1cm)

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

2) a) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} = 0$ (on pourra poser $t = \sqrt{x}$) puis montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

b) Déterminer la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrer que ; $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$ puis en déduire que la fonction f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis en déduire que $f(x) \geq 2$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

4) Construire (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (On admettra que la courbe (C) possède un seul point d'inflexion que l'on ne demande pas de déterminer).

Examen national 2013 session Rattrapage

I- On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - x - \ln x$$

1) Vérifier que $2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

2) Vérifier que $g'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$ et en déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0, 1]$ et qu'elle est croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$

3) Montrer que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0, +\infty[$ (Remarquer que $g(1) = 0$)

II) Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 1 - (\ln x)^2$ et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité 1cm)

1)a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (Remarquer que $f(x) = x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$)

c) En déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction.

2)a) Montrer que ; $f'(x) = 2 \left(\frac{x^2 - \ln x}{x} \right)$ pour tout x de $]0, +\infty[$

b) Vérifier que $\frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - \ln x}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$ et en déduire que la fonction f est croissante sur $]0, +\infty[$

3)a) Montrer que $y = 2x - 2$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point A (1, 0)

b) Construire, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C) (On admettra que A est le seul point d'inflexion de la courbe (C))

Examen national 2012 session normale

Première partie :

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$$

1) Montrer que $(x^2 - 1)$ et $2x^2 \ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]0, 1[$ puis en déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout x de $]0, 1[$

2) Montrer que $(x^2 - 1)$ et $2x^2 \ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]1, +\infty[$ et déduire que : $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]1, +\infty[$

Deuxième partie :

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (x^2 - 1) \ln x$. et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité est 3cm)

1)a- Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, puis

Interpréter géométriquement le résultat obtenu .

b- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

(on pourra écrire $\frac{f(x)}{x}$ sous la forme $\left(\frac{x^2-1}{x}\right) \ln x$ et en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera sa direction)

2)a- Montrer que ; $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$ et interpréter géométriquement le résultat $f'(1) = 0$

b) Déduire que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0, 1[$ et croissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$

c) Donner le tableau de variation de la fonction f sur $]0, +\infty[$ puis montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout x de $]0, +\infty[$

4) Construire (C) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Examen national 2011 session rattrapage

Première partie :

On considère la fonction g définie sur $I =]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x - 1 + \ln(x)$$

Première partie :

1)a) Montrer que : $g'(x) = \frac{x+1}{x}$ pour tout x de I

b) Montrer que la fonction g est croissante sur I .

2) En déduire que : $g(x) \geq 0$ sur $]1, +\infty[$ et que $g(x) \leq 0$ sur $]0, 1[$.

(remarquer que $g(1)=0$).

Deuxième partie :

Soit la fonction numérique définie sur I par :

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x.$$

et Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm)

1)a) Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et donner

une interprétation géométrique de ce résultat.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

(remarquer que $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{x-1}{x}\right) \frac{\ln x}{x}$).

c) En déduire que la courbe (C_f) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera sa direction .

2)a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout x de I .

b) En déduire que la fonction f est croissante sur $]1, +\infty[$ et décroissante sur $]0, 1[$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur I .

3) Construire (C_f) (on admettra que la courbe (C_f) possède un seul point d'inflexion d'abscisse comprise entre 1,5 et 2).

Examen national 2010 session rattrapage

I) On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 3$$

1)a) Vérifier que pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$3x^3 - x - 2 = (x - 1)(3x^2 + 3x + 2)$$

b) Montrer que $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

2)a) Vérifier que $\frac{3x^2+3x+2}{x} > 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

b) En déduire que le signe de $g'(x)$ est celui le signe de $x - 1$ sur $]0; +\infty[$.

3)a) Montrer que la fonction g est décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

b) Montrer que $g(x) > 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$ (remarquer que $g(1) > 0$).

II) Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (on prend $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$)

1) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ pour tout x de $]0; +\infty[$, puis déduire que la fonction f est croissante sur $]0; +\infty[$.

2)a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat.

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1+\ln x}{x^2} = 0$ puis que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ (on rappelle que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \text{)}.$$

c) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

3) Montrer que $y = 3(x - 1)$ est une équation de la droite tangente à la courbe (C) au point de coordonnées $(1; 0)$.

4) Construire la droite (Δ) et la courbe (C) (on admet que la courbe (C) a un unique point d'inflexion dont on ne demande pas de déterminer)

Examen national 2008 session normale

I) On considère la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - 2 \ln x$

1)a) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$

b) Montrer que g est décroissante sur $]0; 2]$ Et est croissante sur $[2; +\infty[$

2) En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de $]0, +\infty[$ (remarquer que $g(2) > 0$).

II) On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - (\ln x)^2$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ puis interpréter

géométriquement le résultat.

2)a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

(poser $t = \sqrt{x}$; on rappelle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$)

b) en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

(Remarquer que $f(x) = x \left(1 - \frac{(\ln x)^2}{x}\right)$)

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ puis déduire que (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

d) Montrer que (C_f) se trouve au-dessous de la droite (Δ) .

3)a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$ et montrer que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Montrer que $y = x$ est l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 1.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $]0, +\infty[$ et que $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$ (On admet que $(\ln 2)^2 < \frac{1}{2}$).

5) Tracer la droite (Δ) et la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

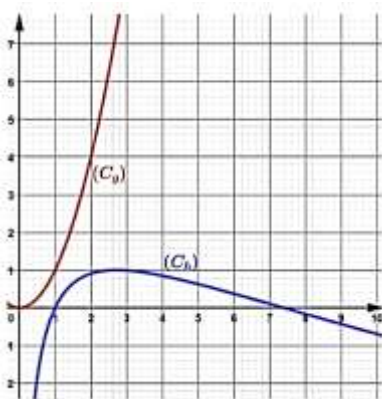
(On admet que $I(e; e - 1)$ est un point d'inflexion à (C_f) On prendra $e \approx 2.7$)

Examen national 2025 session normale

Partie I:

Le graphique représente les courbes (C_g) et (C_h) des fonctions

$g: x \mapsto x^2$ et $h: x \mapsto 2(\ln x) - (\ln x)^2$ sur $]0, +\infty[$ dans un même repère orthonormé.



1)a) Justifier graphiquement que pour tout x de $]0, +\infty[$: $g(x) - h(x) > 0$

La courbe (C_g) se trouve au dessus de la courbe (C_h) et ne se coupent en aucun point par conséquent pour tout x de $]0, +\infty[$: $g(x) > h(x)$.
D'où pour tout x de $]0, +\infty[$: $g(x) - h(x) > 0$.

b) Dédire que pour tout x de

$$]0, +\infty[: \frac{2(\ln x) - (\ln x)^2}{x^2} < 1.$$

D'après la question précédente on a pour tout x de $]0, +\infty[$: $g(x) > h(x)$, donc pour tout x de $]0, +\infty[$: $x^2 > h(x)$, d'où pour tout x de $]0, +\infty[$: $\frac{h(x)}{x^2} < 1$. Par suite pour tout x de $]0, +\infty[$: $\frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1$. (Remarquons que pour tout x de $]0, +\infty[$: $x^2 > 0$).

2) a) Vérifier que la fonction $H: x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$,

La fonction H est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$, et on a pour tout x de $]0, +\infty[$: $H'(x) = (x)' \ln x + x(\ln x)' - (x)'$
 $= \ln x + 1 - 1 = \ln x$

Alors la fonction H est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

b) Résoudre sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation $h(x) = 0$ et en déduire les deux points d'intersection de la courbe (C_h) avec l'axe des abscisses.

$$\text{Soit } x \in]0, +\infty[, h(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x - (\ln x)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \ln x(2 - \ln x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 0 \text{ ou } 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } \ln x = 2 \\ \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = e^2$$

$$\text{Donc } S = \{1, e^2\}.$$

Par conséquent la courbe (C_h) coupe l'axe des abscisses en deux points $A(1, 0)$ et $B(e^2, 0)$.

Partie II:

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{(\ln x)^2}{x}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1)a) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = (-\infty)^2 = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x} = +\infty.$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{(\ln x)^2}{x} \right) = 0 - \infty = -\infty.$$

$$\text{Par suite } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (On peut poser $t = \sqrt{x}$), puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

En appliquant le changement de variables

$$\text{suivant : } \begin{cases} t = \sqrt{x} \Leftrightarrow t^2 = x \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(t^2))^2}{t^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4(\ln t)^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{\ln t}{t} \right)^2$$

$$= 4 \times 0^2 = 0 \left(\text{car } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \right)$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{(\ln x)^2}{x} \right)$$

$$= +\infty - 0 = +\infty.$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

c) Dédire que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{(\ln x)^2}{x} \right) = 0. \text{ Donc}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$. Par conséquent la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

2) a) Montrer que pour tout x de

$$]0, +\infty[, f'(x) = 1 - \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}.$$

Soit $x \in]0, +\infty[$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{\frac{2x \ln x}{x} - (\ln x)^2}{x^2} \\ &= 1 - \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \forall x \in]0, +\infty[; f'(x) = 1 - \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$$

b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

(On peut utiliser la question Partie 1-1-b)

$$\text{Soit } x \text{ de }]0, +\infty[, f'(x) = 1 - \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$$

D'après la question I-1-b., on a $\forall x \in$

$$]0, +\infty[; \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1 \text{ donc}$$

$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) > 0$ par suite la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$.

On a vu que la fonction f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $0 \in f(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$, alors d'après un corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$.

b) Vérifier que $e^{-1} < \alpha < 1$ et montrer que $\ln(\alpha) = -\alpha$.

On a ;

$$f(e^{-1}) = e^{-1} - \frac{(\ln(e^{-1}))^2}{e^{-1}} = e^{-1} - \frac{1}{e^{-1}} = \frac{1 - e^2}{e}$$

Donc $f(e^{-1}) < 0$, et $f(1) = 1$, donc $f(1) > 0$.

Alors $f(e^{-1}) < f(\alpha) < f(1)$ et comme f est strictement croissante alors $e^{-1} < \alpha < 1$.

Et on a

$$f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha - \frac{(\ln(\alpha))^2}{\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln(\alpha))^2 = (\alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow (\ln(\alpha) - \alpha)(\ln(\alpha) + \alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(\alpha) + \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(\alpha) = -\alpha \text{ (car } \ln(\alpha) - \alpha \neq 0 \text{ puisque}$$

$$\ln(\alpha) < 0 < \alpha).$$

$$\text{D'où } \ln \alpha = -\alpha$$

c) Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

$$\text{Soit } x \in]0, +\infty[; f(x) = x - \frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$\text{Donc } \forall x \in]0, +\infty[; f(x) - x = -\frac{(\ln x)^2}{x} \text{ or}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[; \frac{(\ln x)^2}{x} \geq 0, \text{ alors}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[; f(x) - x \leq 0.$$

$$\text{D'où } \forall x \in]0, +\infty[; f(x) \leq x$$

d) Montrer que $y = x$ est l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1

L'équation réduite de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1),$$

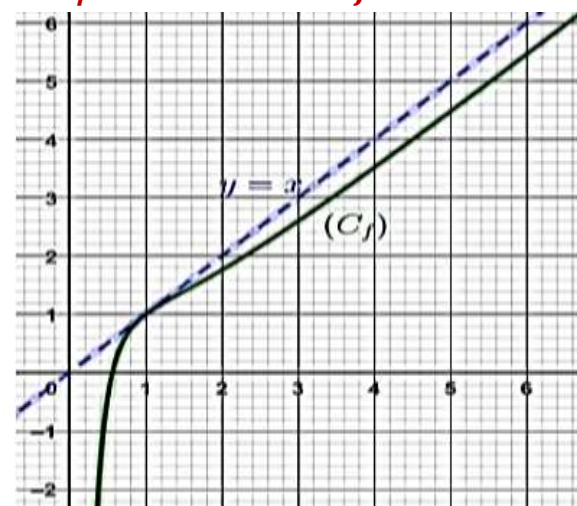
$$\text{Et comme } f(1) = 1 - 0 = 1 \text{ et } f'(1) = 1 - 0 = 1$$

$$\text{Alors (T): } y = x - 1 + 1$$

D'où $y = x$ est l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.

4) Le graphique représente la courbe (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Soit φ la restriction de f sur l'intervalle $]0, 1]$.



a) Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

On a la fonction f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc φ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, 1]$

alors la fonction φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur l'intervalle

$$J = \varphi(]0, 1]) =]\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1)] =]-\infty, 1].$$

b) Montrer que φ^{-1} est dérivable en 0 et que

$$(\varphi^{-1})'(0) = \frac{\alpha}{2+2\alpha}$$

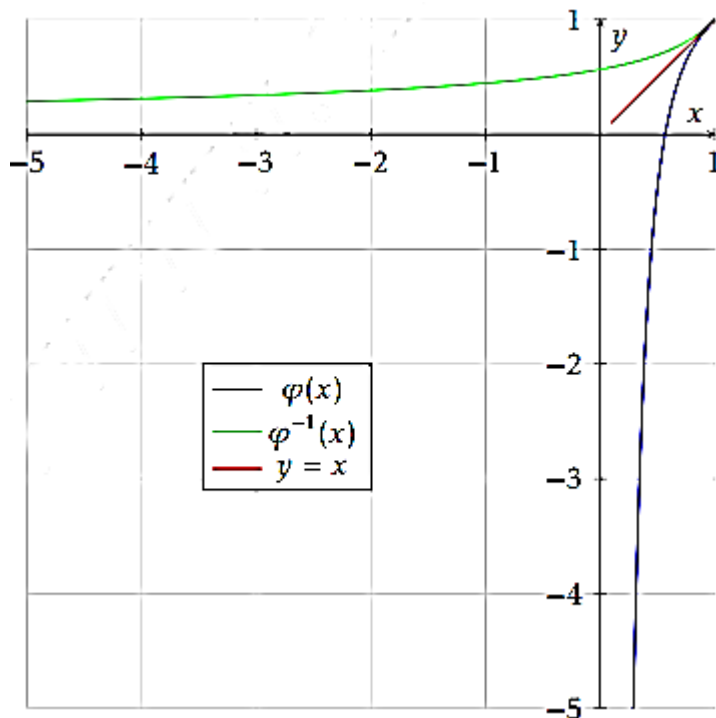
On a $\alpha \in]0, 1]$ et $\varphi(\alpha) = 0$ donc $\varphi^{-1}(0) = \alpha$ et

On a φ est dérivable en α et :

$$\begin{aligned}\varphi'(\alpha) &= f'(\alpha) = 1 - \frac{2\ln(\alpha) - (\ln(\alpha))^2}{(\alpha)^2} \\ &= 1 - \frac{-2\alpha - (\alpha)^2}{(\alpha)^2} = 1 - \frac{-2 - \alpha}{\alpha} = \frac{2+2\alpha}{\alpha}\end{aligned}$$

Et comme $\alpha > 0$ alors $\varphi'(\alpha) \neq 0$ par conséquent la fonction φ^{-1} est dérivable en 0 et on a $(\varphi^{-1})'(0) = \frac{1}{\varphi'(\alpha)} = \frac{\alpha}{2+2\alpha}$.

c) Recopier la courbe de φ et construire la courbe de φ^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$



Partie III:

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que $1 < u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Pour $n = 0$ on $u_0 = e$ donc $u_0 > 1$. Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $u_n > 1$ et montrons que $u_{n+1} > 1$.

D'après (HR) on a $u_n > 1$ et comme la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors

$f(u_n) > f(1)$ donc $u_{n+1} > 1$ car $f(1) = 1$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}; u_n > 1$.

2)a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On utilise la question Partie II-3-c)

D'après la question II-3-c.

On a $\forall x \in]0, +\infty[; f(x) \leq x$

Donc $\forall x \in]1, +\infty[; f(x) \leq x$

Et on sait que $\forall n \in \mathbb{N}; u_n > 1$,

Alors $\forall n \in \mathbb{N}; f(u_n) \leq u_n$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} \leq u_n$.

Par conséquent la suite (u_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Puisque la suite (u_n) est minorée par 1 et est décroissante alors elle est convergente.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

La suite (u_n) est définie par :

$u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$

et $\begin{cases} f \text{ est continue sur }]1, +\infty[\\ f(]1, +\infty[) =]1, +\infty[\\ u_0 \in]1, +\infty[\end{cases}$, alors la limite de (u_n) est convergente

la suite (u_n) est la solution dans l'intervalle

$[1, +\infty[$ de l'équation $f(x) = x$.

On a

$$\begin{aligned}f(x) = x &\Leftrightarrow x - \frac{(\ln x)^2}{x} = x \\ &\Leftrightarrow \frac{(\ln x)^2}{x} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\ln x)^2 = 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Et comme $1 \in [1, +\infty[$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Examen national 2023 session normale

Soit f la fonction numérique définie sur

$]0, +\infty[$ par $f(x) = 2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2$

Et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1cm)

1)a) Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f(x) = \frac{3x - 2 + 2x \ln x + x(\ln x)^2}{x}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2 \\ &= \frac{2x - 2 + x(1 - \ln x)^2}{x} \\ &= \frac{2x - 2 + x(1 - 2\ln x + (\ln x)^2)}{x} \\ &= \frac{2x - 2 + x - 2x \ln x + x(\ln x)^2}{x} \\ &= \frac{3x - 2 - 2x \ln x + x(\ln x)^2}{x} \end{aligned}$$

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x})^2 (\ln(\sqrt{x})^2)^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x})^2 (2 \ln \sqrt{x})^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 \sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2 \end{aligned}$$

On pose $X = \sqrt{x}$ donc $x = X^2$;

or $x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = \lim_{X \rightarrow 0^+} (2X \ln X)^2 = 0$$

; (car $\lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln X = 0$)

Montrer que ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \sqrt{x^2})^2}{\sqrt{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 \ln \sqrt{x})^2}{\sqrt{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 \end{aligned}$$

On pose $X = \sqrt{x}$ donc $x = X^2$;

or $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln X}{X} \right)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln X}{X}$$

c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ puis

interpréter géométriquement le résultat

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x - 2 - 2x \ln x + x(\ln x)^2}{x} \\ &= \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{aligned}$$

Car : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x - 2 = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$$

Donc la droite d'équation $x = 0$ c-à-dire l'axe des abscisses est asymptote verticale à (Cf)

d) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2 = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x)^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2 - 2x \ln x + x(\ln x)^2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2 - 2x \ln x + x(\ln x)^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = 0$$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique suivant la droite (Ox) au voisinage de $+\infty$

2) Montrer que $f'(x) = \frac{2(1-x+x \ln x)}{x^2}$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$

Rappel

- La fonction $\ln$ est définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$
- Pour tout x de $]0, +\infty[$: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ et $(u^n)' = n u' u^{n-1}$

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ car c'est une somme et composée des fonctions dérivables sur l'intervalle $]0, +\infty[$

Soit x de l'intervalle $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \left(2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2\right)'$$

$$= 0 + \frac{1}{x^2} + 2(1 - \ln x)'(1 - \ln x)^1$$

$$= \frac{2}{x^2} - 2 \times \frac{1}{x} (1 - \ln x)$$

$$= \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^2} (x - x \ln x) = \frac{2(1 - x + x \ln x)}{x^2}$$

3) En exploitant le tableau de variation ci-dessous, de la fonction dérivée f' de f sur $]0, +\infty[$

x	0	1	β	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		$f'(\beta)$	0

a) Prouver que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f

D'après le tableau on a 0 est une valeur minimale de f' sur l'intervalle $]0, \beta[$

Donc $\forall x \in]0, \beta[: f'(x) \geq 0$

Et on a $f'(\beta) = 0$

Donc $\forall x \in [\beta, +\infty[: f'(x) > 0$

Donc $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) \geq 0$

Donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 +	
$f(x)$	$-\infty$  $+\infty$		

b) Donner le tableau de signe de la dérivée seconde f'' de la fonction f sur $]0, +\infty[$

On a f' est strictement décroissante sur les intervalles $]0, 1[$ et $[\beta, +\infty[$ donc

Donc $\forall x \in]0, 1[\cup [\beta, +\infty[: f''(x) < 0$

On a f' est strictement croissante sur les intervalles $[1, \beta[$ donc

Donc $\forall x \in [1, \beta[: f''(x) > 0$

D'où le tableau de signe de f'' est :

x	0	1	β	$+\infty$
$f''(x)$	-	+	-	-

c) En déduire la concavité de la courbe (C) en précisant les abscisses de ses deux points d'inflexions

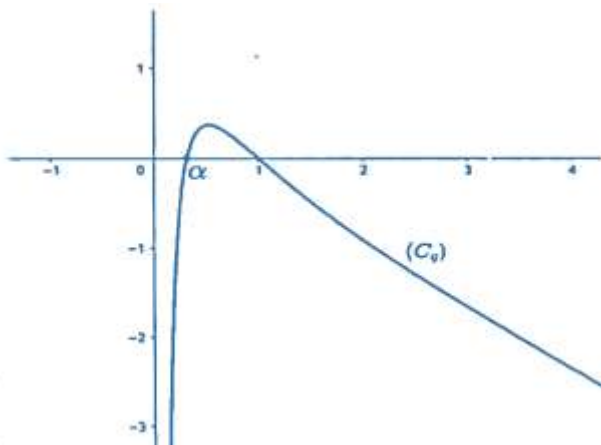
D'après la question précédente on a :

x	0	1	β	$+\infty$		
$f''(x)$		-	0	+	0	-
La Concavité de (C_f)			$I(1, f(1))$ Point d'inflexion de (C_f)		$J(\beta, f(\beta))$ Point d'inflexion de (C_f)	

On a f'' s'annule en 1 et en β en changeant le signe donc les points d'inflexion de (C) sont les points d'abscisses 1 et β

1) La courbe (C_g) ci-contre est la représentation graphique de la fonction $g: x \mapsto f(x) - x$ et qui s'annule en α et 1 ($\alpha \approx 0,3$)

Soit (Δ) la droite d'équation $y=x$



a) A partir de la courbe (C_g) , déterminer le signe de la fonction g sur $]0, +\infty[$

La courbe (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[\alpha; 1]$

Donc $\forall x \in [\alpha; 1]: g(x) \geq 0$

La courbe (C_g) est au-dessous de l'axe des abscisses sur $]0, \alpha[$ et $[1; +\infty[$

Donc $\forall x \in]0, \alpha[\cup [1; +\infty[: g(x) < 0$

b) Déduire que la droite (Δ) est en dessous de (C) sur l'intervalle $[\alpha; 1]$ et au-dessus de (C) sur les intervalles $]0, \alpha[$ et $[1; +\infty[$

On a $\forall x \in [\alpha; 1]: g(x) \geq 0$

Donc $\forall x \in [\alpha; 1]: f(x) - x \geq 0$

Donc la droite (Δ) est en dessous de (C) sur l'intervalle $[\alpha; 1]$

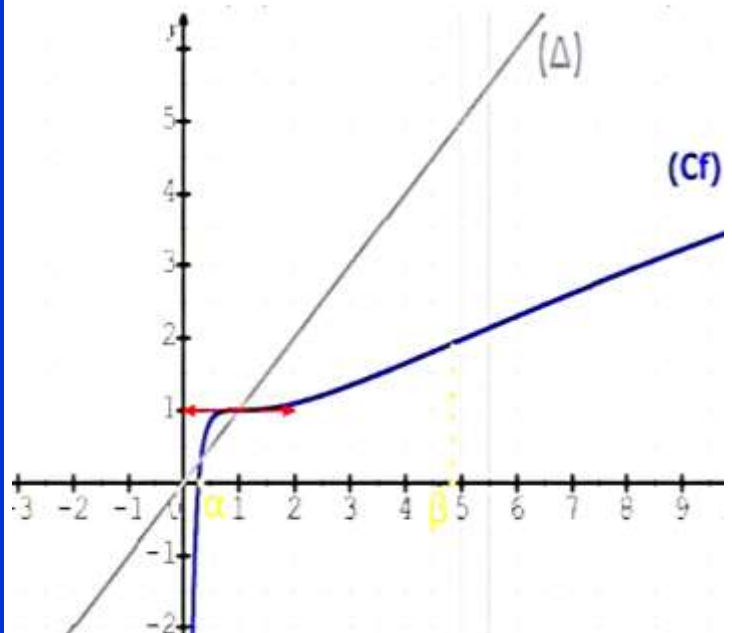
On a $\forall x \in]0, \alpha[\cup [1; +\infty[: g(x) < 0$

Donc $\forall x \in]0, \alpha[\cup [1; +\infty[: f(x) - x < 0$

Donc la droite (Δ) est en au-dessus de (C) sur les intervalles $]0, \alpha[$ et $[1; +\infty[$

5) Construire la courbe (C) et (Δ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(on prend : $\alpha \approx 0,3$ et $f(\beta) \approx 1,9$)



6) Vérifier que $H: x \mapsto 2x - x \ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto 1 - \ln(x)$ sur $[1; \alpha]$

La fonction $x \mapsto 2x - x \ln(x)$ est dérivable sur $[1; \alpha]$ car c'est une somme de deux fonctions dérivables sur $[1; \alpha]$

ET on a ;

$$\begin{aligned} H'(x) &= (2x - x \ln(x))' \\ &= 2 - (\ln x + x \times \frac{1}{x}) \\ &= 1 - \ln(x) \end{aligned}$$

Donc $H: x \mapsto 2x - x \ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto 1 - \ln(x)$ sur $[1; \alpha]$

7) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 \in]\alpha; 1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a) Montrer par récurrence que $\alpha < u_n < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

➤ Pour $n=0$ on a $u_0 \in]\alpha; 1[$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $\alpha < u_n < 1$ et montrons que $\alpha < u_{n+1} < 1$.

On sait que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $] \alpha; 1[$

et $\alpha < u_n < 1$

$\alpha < u_n < 1 \Rightarrow f(\alpha) \leq f(u_n) \leq f(1)$

$\Rightarrow \alpha \leq u_{n+1} \leq 1$

D'après le principe de récurrence, on a :

$(\forall n \in \mathbb{N}) : \alpha < u_n < 1$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante (On peut utiliser la question 4)b))

b) Soit n un entier naturel,

On a: $(\forall x \in]\alpha; 1[): f(x) \geq x$, d'après 4)b)

et $u_n \in]\alpha; 1[$ d'après 7)a)

Donc on pose $x = u_n$,

On trouve $f(u_n) \geq u_n$

Donc : $u_{n+1} \geq u_n$

D'où la suite (u_n) est croissante

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite

la suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle est convergente.

- La fonction f est continue sur l'intervalle $] \alpha; 1[$; car elle est dérivable sur $] \alpha; 1[$

- $f(] \alpha; 1[) =] \alpha; 1[\subset] \alpha; 1[$

- $u_0 \in] \alpha; 1[$

- La suite (u_n) est convergente

Alors la limite de la suite (u_n) est L la

solution de l'équation $f(x) = x$

$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

$\Leftrightarrow g(x) = 0$;

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \alpha$

Et comme la suite (u_n) est croissante

Donc la limite de la suite (u_n) est 1

Examen national 2022 session rattrapage

Soit f la fonction numérique définie sur

$[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x^4(\ln x - 1)^2 ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4(\ln x - 1)^2 = +\infty$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4(\ln x - 1)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3(\ln x - 1)^2 = +\infty$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc

(C) admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$

2) a) Montrer que f est continue à droite en 0

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^4(\ln x - 1)^2$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^4((\ln x)^2 - 2\ln(x) + 1)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2(x\ln x)^2 - 2x^4\ln(x) + x^4 = 0$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x\ln x)^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4\ln(x) = 0$
 et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

D'où f est continue à droite en 0

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4(\ln x - 1)^2}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3((\ln x)^2 - 2\ln(x) + 1)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} x(x\ln x)^2 - 2x^3\ln(x) + x^3 = 0$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x\ln x)^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3\ln(x) = 0$
 $= 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 = 0$

Donc f est dérivable à droite de 0 et $f'_d(0) = 0$

Interprétation géométrique : La courbe (C) admet une demi-tangente horizontale à droite du point $O(0;0)$

2) $Mq f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2 \ln x - 1)$

On a la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ car c'est une composée et produit des fonctions dérivable sur $]0, +\infty[$

Soit $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^4(\ln x - 1)^2)' \\ &= 4x^3(\ln x - 1)^2 + 2x^4(\ln x - 1)'(\ln x - 1) \\ &= 4x^3(\ln x - 1)^2 + 2x^4 \times \frac{1}{x}(\ln x - 1) \\ &= 4x^3(\ln x - 1)^2 + 2x^3(\ln x - 1) \\ &= 2x^3(\ln x - 1)(2(\ln x - 1) + 1) \\ &= 2x^3(\ln x - 1)(2 \ln x - 1) \end{aligned}$$

b) Dresser le tableau de variation de f

Soit $x \in]0, +\infty[$ donc $2x^3 > 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3(\ln x - 1)(2 \ln x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) - 1 = 0 \text{ ou } 2\ln(x) - 1 = 0$$

$$\text{car } x > 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \text{ ou } \ln(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = e \text{ ou } x = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = e \text{ ou } x = \sqrt{e}$$

x	0	$\sqrt{e}$	e	$+\infty$
$\ln(x) - 1$	-	0	+	+
$2\ln(x) - 1$	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	0	$f(\sqrt{e})$	$f(e)$	$+\infty$

4)a) Sachant que $f''(x) = 2x^2(6 \ln x - 5) \ln x$, étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0, +\infty[$

Soit $x \in]0, +\infty[$ donc $2x^2 > 0$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2(6 \ln x - 5) \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\ln(x) - 5 = 0 \text{ ou } \ln(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{5}{6} \text{ ou } x = 1 \Leftrightarrow x = e^{\frac{5}{6}} \text{ ou } x = 1$$

x	0	1	$e^{\frac{5}{6}}$	$+\infty$
$6\ln(x) - 5$	-	0	+	+
$\ln(x)$	-	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	+

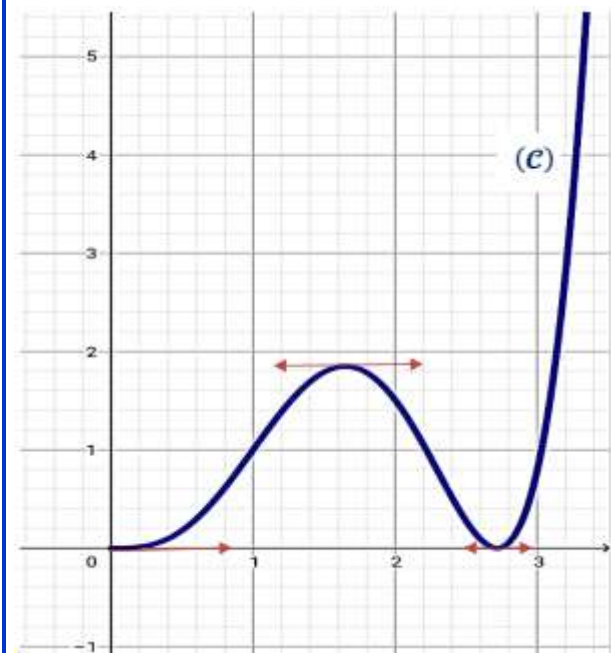
b) Dédire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses

On a f'' s'annule et change de signe

en $e^{\frac{5}{6}}$ et en 1 donc (C) admet deux points

d'inflexion d'abscisses $e^{\frac{5}{6}}$ et 1

5) a) Construire la courbe (C)



b) En utilisant la courbe (C) , déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2(\ln x - 1) = -1$

L'équation $x^2(\ln x - 1) = -1$ est définie si $x \in]0, +\infty[$

De plus on a $x^2(\ln x - 1) < 0$ donc $\ln x - 1 < 0$ donc $0 < x < e$

Soit $x \in]0, e[$

$$x^2(\ln x - 1) = -1 \Leftrightarrow x^2(\ln x - 1) = -1$$

$$\Leftrightarrow x^4(\ln x - 1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 1$$

Donc le nombre de solutions de l'équation est le nombre de points d'intersection de (C) avec la droite d'équation $y = 1$ dans $]0, e[$

D'où l'équation $x^2(\ln x - 1) = -1$ admet deux solutions

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|)$

a) Montrer que la fonction g est paire

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $-x \in \mathbb{R}$

$$\text{Et on a : } g(-x) = f(|-x|)$$

$$= |-x|^4(\ln|-x| - 1)^2$$

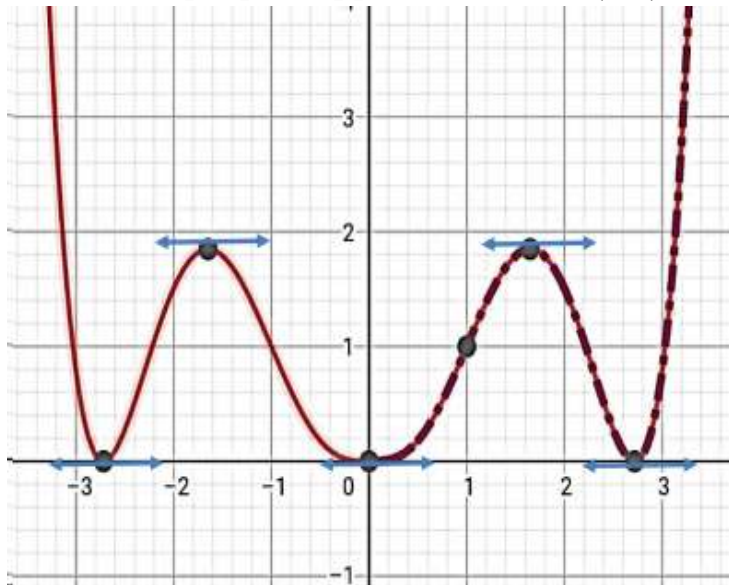
$$= |x|^4(\ln|x| - 1)^2 = f(|x|)$$

$$= g(x)$$

Donc la fonction g est paire

b) Construire (C_g) la courbe représentative de g dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- Si $x \in [0; +\infty[$ on a $g(x) = f(|x|) = f(x)$ donc la courbe (C_g) est confondue avec la courbe (C) de f sur $[0; +\infty[$
- Et on a la fonction g est paire donc (C_g) est symétrique par rapport à la droite (Oy)



Examen national 2021 session rattrapage

On considère la fonction numérique h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = x + \ln x$

1) Montrer que h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

La fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de deux fonctions usuelles dérivables
Et pour tout $x > 0$ on a :

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0 \text{ (car : } x > 0 \text{)}$$

D'où h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

2 - Déterminons $h(]0; +\infty[)$

Puisque h est dérivable et strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Alors est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$$\text{Donc } h(]0; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)[$$

$$\text{Et on a } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \ln(x) = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln(x) = +\infty.$$

$$\text{D'où } h(]0; +\infty[) =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$$

3 - a) Dédisons que l'équation $h(x) = 0$

admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$

Comme h est continue et strictement

croissante sur $]0; +\infty[$ et $0 \in h(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$.

D'après le T.V.I l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$

b) Montrons que $0 < \alpha < 1$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$ et $h(1) = 1$ donc $0 \in$

$$h(]0; 1]) = h(]-\infty; 1])$$

Alors $\alpha \in]0; 1[$, par conséquent $0 < \alpha < 1$

4 - a) Vérifions que $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$

α est solution de l'équation $h(x) = 0$ donc

$$h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \ln(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\ln(\alpha)$$

$$\text{D'autre part : } h\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} + \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} - \underbrace{\ln(\alpha)}_{+\alpha}$$

$$\text{D'où } h\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$$

b) Dédisons que $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) > 2$

$$\text{On a } h\left(\frac{1}{\alpha}\right) - 2 = \alpha + \frac{1}{\alpha} - 2 = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$$

$$\text{Puisque } \alpha > 0 \text{ et } \alpha \neq 1 \text{ alors } \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} > 0,$$

$$\text{D'où } h\left(\frac{1}{\alpha}\right) > 2.$$

Examen national 2020 session normale

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$

par $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln(x)$

1)a) Montrer pour tout x de $]0; +\infty[$ que

$$g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ car

c'est une somme des fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$

Soit x de $]0; +\infty[$

$$g'(x) = (2\sqrt{x} - 2 - \ln(x))'$$

$$= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

b) Montrer que g est croissante sur $[1, +\infty[$

Soit x de $[1, +\infty[$

Donc $x \geq 1$ donc $\sqrt{x} \geq 1$ donc $\sqrt{x} - 1 \geq 0$

$$\text{Donc } g'(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x} \geq 0$$

Donc g est croissante sur $[1, +\infty[$

c) En déduire pour tout x de $[1, +\infty[$ que

$$0 \leq \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$$

(Remarquer que $2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$)

Soit x de $[1, +\infty[$

Donc $x \geq 1$ donc $g(x) \geq g(1)$ car g est croissante sur $[1, +\infty[$ donc $g(x) \geq 0$

$$\text{Donc } 2\sqrt{x} - 2 - \ln(x) \geq 0$$

$$\text{Donc } \ln(x) \leq 2\sqrt{x} - 2$$

$$\text{Donc } \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$$

Et on a $x \geq 1$ donc $\ln(x) \geq 0$

Donc pour tout x de $[1, +\infty[$ que

$$0 \leq \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$$

d) Montrer pour tout x de $[1, +\infty[$ que

$$0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}} \text{ et en déduire } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$$

Soit x de $[1, +\infty[$

$$\text{On a } 0 \leq \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$$

$$\text{Donc } 0 \leq (\ln x)^3 \leq (2\sqrt{x})^3$$

$$\text{Donc } 0 \leq (\ln x)^3 \leq 8\sqrt{x}^3$$

$$\text{Donc } 0 \leq (\ln x)^3 \leq 8x\sqrt{x}$$

$$\text{Donc } 0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8x\sqrt{x}}{x^2}$$

$$\text{Donc } 0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$$

$$\text{En déduire } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$$

$$\text{On a } 0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{\sqrt{x}} = 0$$

Donc d'après théorème de gendarme on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2} = 0$$

2) Montrer que

$G: x \mapsto x \left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln(x) \right)$ est une

primitive de g sur $]0, +\infty[$

La fonction G est dérivable sur $]0, +\infty[$ car c'est une somme et produit des fonctions

dérivables sur $]0, +\infty[$

Soit x de $]0, +\infty[$

$$G'(x) = \left(x \left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln(x) \right) \right)'$$

$$= -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln(x) + x \left(\frac{4}{6\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right)$$

$$= -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln(x) + \frac{2}{3}\sqrt{x} - 1$$

$$= 2\sqrt{x} - \ln(x) - 2 = g(x)$$

Donc G est une primitive de g sur $]0, +\infty[$

Examen national 2019 session normale

Première partie :

Soit f la fonction numérique définie sur

$]0; +\infty[$ par ; $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter ce résultat géométriquement.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

$$= +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$$

Donc la droite d'équation $x = 0$ c-à-dire l'axe des abscisses est asymptote verticale à (Cf)

2) a) vérifie que pour tout x de $]0; +\infty[$,

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right) \ln x$$

$$x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right) \ln x = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

$$= f(x)$$

b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right) \ln x = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{2} = +\infty$$

c) Montrer que pour tous x de $]0; +\infty[$

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 \text{ et déduire que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{(\ln \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}^2} = \frac{(2 \ln \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}^2} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$$

On pose $X = \sqrt{x}$ donc $x = X^2$;

or $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln X}{X} \right)^2 = 0 ; \text{ Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln X}{X}$$

d) Montrer que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y = x$

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2x} - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{(\ln x)^2}{2x} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} - \ln x(1 - \ln(x)) = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Donc la courbe (Cf) admet une branche parabolique suivant la droite (Δ) d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$

3.a) Vérifier que pour tout x de $]0; 1]$: $(x - 1) + \ln x \leq 0$ et que pour tout x de $[1; +\infty[$: $(x - 1) + \ln x \geq 0$.

Soit x de $]0; 1]$

On a $\ln x \leq 0$ et $(x - 1) \leq 0$

Donc $(x - 1) + \ln x \leq 0$

Soit x de $[1; +\infty[$

On a $\ln x \geq 0$ et $(x - 1) \geq 0$

Donc $(x - 1) + \ln x \geq 0$

b) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$$

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme et quotient des fonctions dérivable sur $]0, +\infty[$

Rappel : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

On a $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$ donc

$$f'(x) = 1 + 0 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{x} \ln(x)$$

$$= 1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = \frac{x-1+\ln x}{x}$$

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

On a pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$

Et on a pour x de $]0; 1]$: $(x - 1) + \ln x \leq 0$

Donc f est strictement décroissante sur $]0; 1]$

et pour tout x de $[1; +\infty[$: $(x - 1) + \ln x \geq 0$

Donc f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$

On dresse le tableau de variations de f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow \quad \nearrow$ $3/2$	$+\infty$

4. a) Montrer que $f''(x) = \frac{2-\ln x}{x^2}$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$

La fonction f' est dérivable sur $]0; +\infty[$ car c'est une quotient des fonction dérivable sur $]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[\frac{x-1+\ln x}{x} \right]' \\ &= \frac{(x-1+\ln x)'x - (x-1+\ln x)}{x^2} \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x - x + 1 - \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{x + 1 - x + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{2 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

b) En déduire que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

On a $f''(x) = \frac{2-\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

x	0	e^2	$+\infty$
$2-\ln x$	+	0	-

Donc f'' s'annule et change de signe en e^2

Donc $I(e^2; f(e^2))$ c'est-à-dire $I\left(e^2; e^2 + \frac{1}{2}\right)$ point inflexion de la courbe (C)

5. a) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$ et déduire la position relative de (C) et (Δ).

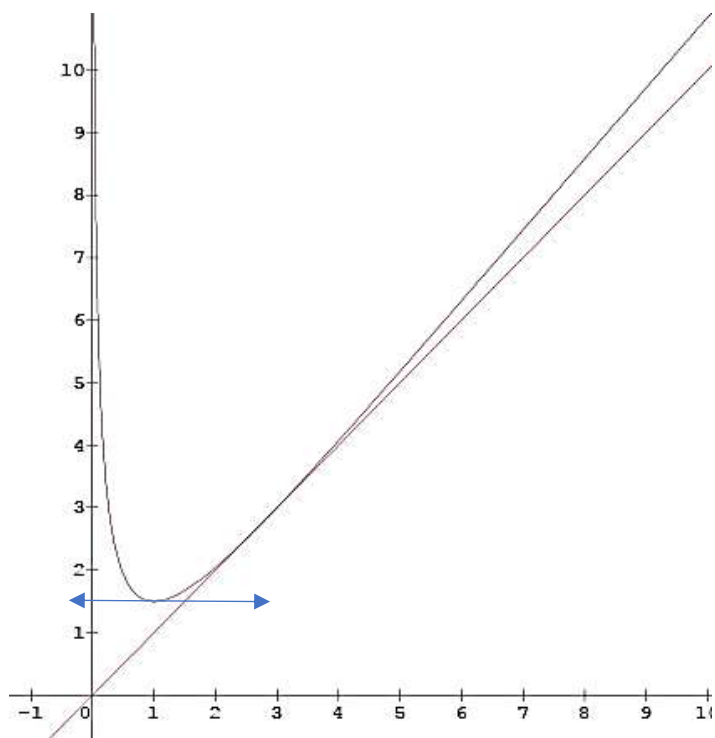
$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \\ &= \frac{1}{2}(1 - 2\ln x + (\ln x)^2) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \ln x)^2 = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Donc la courbe (C) est en dessus de la droite (Δ) sur $]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{De plus } f(x) - x = 0 &\Leftrightarrow (\ln x - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = e \end{aligned}$$

Donc la courbe (C) est tangente à la droite (Δ) au point $A(e; e)$

2) Construire (Δ) et (C) dans le même repère ($O; \vec{i}; \vec{j}$)



6) Montrer $H: x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $h: x \mapsto \ln(x)$

On a fonction H est dérivable sur $]1, +\infty[$

$$\begin{aligned} H'(x) &= (x \ln(x) - x)' \\ &= 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 \\ &= \ln(x) \end{aligned}$$

Donc $H: x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $h: x \mapsto \ln(x)$ sur $]1, +\infty[$

Deuxième partie :

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1.a) Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

➤ Pour $n=0$ on a $1 \leq u_0 = 1 \leq e$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $1 \leq u_n \leq e$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq e$.

On sait que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[1; e]$ et

$$1 \leq u_n \leq e, \text{ donc ;}$$

$$1 < u_n < e \Rightarrow 1 \leq f(u_n) \leq f(e)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq e$$

$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq e$$

D'après le principe de récurrence, on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq u_n \leq e$$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Soit n un entier naturel,

$$\text{On a : } (\forall x \in [1; e]): f(x) - x \geq 0$$

$$\text{et } u_n \in [1; e]$$

$$\text{Donc on pose } x = u_n$$

$$\text{On trouve } f(u_n) - u_n \geq 0 \text{ donc } f(u_n) \geq u_n$$

$$\text{Donc : } u_{n+1} \geq u_n ;$$

D'où la suite (u_n) est croissante

c) déduire que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est croissante et majorée par e donc elle est convergente.

2) Calculer la limite de la suite (u_n) .

• La fonction f est continue sur l'intervalle $[1; e]$; car elle est dérivable sur $[1; e]$

$$\bullet f([1; e]) =]f(0); f(\ln 4)[= \left[\frac{3}{2}; e\right] \subset [1; e]$$

$$\bullet u_0 = 1 \in [1; e]$$

• La suite (u_n) est convergente

Alors la limite de la suite (u_n) est L la solution de l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e,$$

Donc la limite de la suite (u_n) est e

Examen national 2018 session rattrapage

1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - 1 - 2\ln^2 x + 2\ln x$$

Le tableau ci-contre est le tableau de

variations de la

fonction g sur

$]0, +\infty[$

1) Calculer $g(1)$

$$\text{On a : } g(1) = 1^3 - 1 - 2\ln^2 1 + 2\ln 1 = 0$$

2 - Déterminons le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]0; 1]$ et $[1; +\infty[$:

D'après le tableau de variation de g ; la fonction est strictement croissante sur

$]0; +\infty[$ et comme on a $g(1) = 0$ alors on a :

$$(\forall x \in]0; 1]) \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow g(x) \leq 0, \text{ et } (\forall x \in [1; +\infty[) \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq 0.$$

Partie II

f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$$

1 - a) Vérifions que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \right)$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \right)$$

$$\left(\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 = 0 \right)$$

b) Montrons que la droite (D) d'équation

$y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe (C)

au voisinage $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \right) = 0$$

D'où la droite (D) d'équation : $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

c) Déterminons la position relative de la droite (D) et la courbe (C) :

Soit $(x \in]0; +\infty[)$

Étudions le signe de $f(x) - \left(x - \frac{1}{2} \right)$:

$$f(x) - \left(x - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \right) > 0$$

On en déduit que la courbe(C) est au-dessus de la droite (D) sur $]0; +\infty[$.

2 - Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et

interprétons le résultat géométriquement :

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\left(\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x^2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 = +\infty \right)$$

Interprétation géométrique :

La courbe(C) admet l'axe des ordonnées

comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$

3 - a) Montrons que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$

Soit $x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \right)' \\ &= 1 - \frac{4x}{(2x^2)^2} + 2 \left(\frac{\ln x}{x}\right)' \times \left(\frac{\ln x}{x}\right) \\ &= \frac{x^3}{x^3} - \frac{4}{4x^3} + 2 \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} \times \frac{\ln x}{x} \\ &= \frac{x^3 - 1}{x^3} + \frac{2(1 - \ln x) \times \ln x}{x^3} \\ &= \frac{x^3 - 1 - 2\ln^2 x + 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } (\forall x \in]0; +\infty[) f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

b) Montrons que la fonction f est décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

D'après la question Partie I-2- on a :

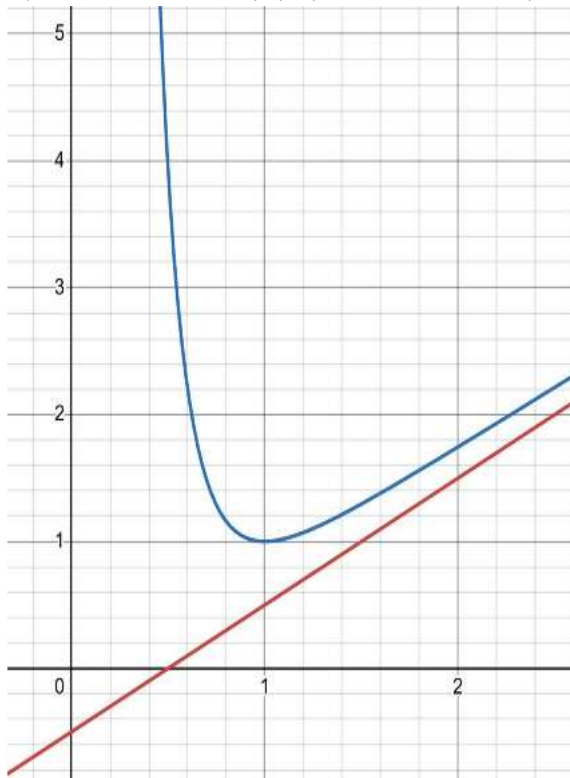
- $(\forall x \in]0; 1]) g(x) \leq 0$ Donc : $f'(x) \leq 0$.
- $(\forall x \in [1; +\infty[) g(x) \geq 0$ Donc $f'(x) \geq 0$.

D'où la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0, 1]$ et croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

4) Construire dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la droite (D) et la courbe (C) (unité : 1 cm)



III) On considère la fonction numérique h définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - x$

1) a) Vérifier que $h(1) = 0$

b) Dans la figure ci-contre (C_h) est la représentation graphique de h

Déterminer le signe de $h(x)$ sur chacun des intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$ et déduire que $f(x) \leq x$ pour tout x de $[1, +\infty[$

On a la courbe de h est en dessus de (Ox) sur

l'intervalle $]0, 1]$. Donc

$h(x) \geq 0$ sur l'intervalle $]0, 1]$.

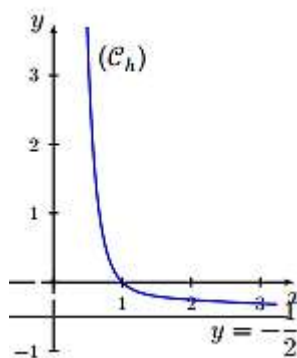
On a la courbe de h est en dessous de (Ox) sur l'intervalle

$[1, +\infty[$.

Donc $h(x) \leq 0$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

On en déduit que pour tout x dans l'intervalle $[1, +\infty[$ on a : $f(x) - x \leq 0$.

D'où pour tout x dans l'intervalle $[1, +\infty[$ on a : $f(x) \leq x$.



2 - Soit La suite numérique (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = e \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

a) Montrons par récurrence que $1 \leq U_n \leq e$ pour tout entier naturel n .

Pour $n = 0$ On a : $1 \leq U_0 = e \leq e$ Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons que : $1 \leq U_n \leq e$ et montrons que : $0 \leq U_{n+1} \leq e$

On a : $1 \leq U_n \leq e$ et comme f est croissante sur $[1, +\infty[$ alors :

$$\begin{aligned} 1 \leq U_n \leq e &\Rightarrow f(1) \leq f(U_n) \leq f(e) \\ &\Rightarrow 1 \leq U_{n+1} \leq f(e) \leq e \quad (\forall x \in [1, +\infty[) \end{aligned}$$

Donc : $0 \leq U_{n+1} \leq e$

On a montré par récurrence que $1 \leq U_n \leq e$ pour tout entier naturel n .

c) Montrons que la suite (u_n) est décroissante.

(D'après la question Partie III-1-b)) on a :

$h(x) \leq 0$ sur $[1, +\infty[$.

Et comme $1 \leq U_n \leq e$; alors :

$$h(U_n) \leq 0 \Leftrightarrow f(U_n) - U_n \leq 0$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1} \leq U_n$

D'où la suite (U_n) est décroissante.

d) Dédisons que la suite (u_n) est convergente et déterminons sa limite .

La suite (U_n) est minorée par 1 et décroissante donc elle est convergente.

On a :

$$\begin{cases} f(U_n) = U_{n+1} \\ f([1; e]) \subset [1; e] \\ f \text{ est continue sur } [1; e] \\ U_0 \in [1; e] \\ (U_n) \text{ est convergente} \end{cases}$$

Donc la limite de la suite

L est solution de l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow h(x) = 0$$

D'après le graphique de h ,

On a $x = 1$ est la seule solution

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$.

Examen national 2017 session normale

Partie I :

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$

par : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2 \ln x$

1. Calculer $g(1)$

$$g(1) = 1^2 + 1 - 2 + 2 \ln 1 = 0$$

2. En partant du tableau de variation de g

Ci-contre,

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$-\infty$

Montrer que :

$g(x) \leq 0$ Pour tout x de $]0, 1]$

$g(x) \geq 0$ Pour tout x de $[1, +\infty[$

Soit : $x \in]0, 1]$

$$x \in]0, 1] \Rightarrow x \leq 1$$

et g est str croissante sur $]0, 1]$

$$\Rightarrow g(x) \leq g(1)$$

$$\Rightarrow g(x) \leq 0$$

Soit : $x \in [1, +\infty[$

$$x \in [1, +\infty[\Rightarrow 1 \leq x$$

et g est str croissante sur $[1, +\infty[$

$$\Rightarrow g(1) \leq g(x)$$

$$\Rightarrow 0 \leq g(x)$$

On dresse le tableau de signe de g sur $]0, +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$

par : $f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Interprétation géométrique:

la courbe (C) admet à droite en 0 une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

2)a) Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \frac{\ln x}{x}\right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = (1 - 0) = 1 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

b) Montrons que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite (D) d'équation $y = x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x\right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \frac{\ln x}{x}\right) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Ainsi la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite (D) d'équation $y = x$.

3) a) Montrons que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, pour tout x appartient à l'intervalle $]0, +\infty[$.

Soit $x \in]0, +\infty[$, on a f est dérivable sur $]0, +\infty[$ de plus :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x\right)' \\ &= 1 + \frac{2}{x^2} \ln x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \frac{1}{x} \\ &= 1 + \frac{2}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \\ &= \frac{x^2 + x - 2 + 2 \ln x}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

b) Montrons que f est décroissante sur l'intervalle $]0; 1]$ et croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

On a $f(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, donc le signe de f' est celui de g .

D'après la question I-2 on a

$\forall x \in]0; 1]; g(x) \leq 0$ et $\forall x \in [1; +\infty[; g(x) \geq 0$

Donc

$\forall x \in]0; 1]; f'(x) \leq 0$ et $\forall x \in [1; +\infty[; f'(x) \geq 0$

Ainsi f est décroissante sur l'intervalle $]0; 1]$ et croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$

c) Dressons le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

4)a) Résolvons dans l'intervalle $]0; +\infty[$

l'équation : $(1 - \frac{2}{x}) \ln x = 0$.

Soit $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0 &\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x} = 0 \text{ ou } \ln x = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x-2}{x} = 0 \text{ ou } x = e^0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

D'où l'équation $(1 - \frac{2}{x}) \ln x = 0$ admet deux solutions dans $]0; +\infty[$ qui sont 1 et 2.

b) Dédisons que la courbe (C) coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées.

$$f(x) - x = \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$$

$$\text{D'où } f(x) - x = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 1$$

Ainsi la courbe (C) coupe la droite (D) en deux points A(1, 1) et B(2, 2)

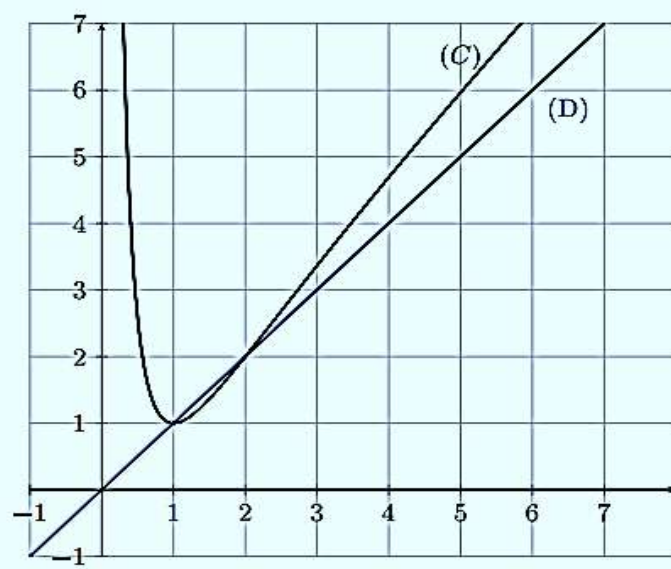
c) Montrons que $f(x) \leq x$ pour tout $x \in [1; 2]$ et déduisons la position relative de la courbe (C) et la droite (D) sur l'intervalle $[1, 2]$.

On a $f(x) - x = \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$ le tableau de signe de $f(x) - x$ est :

x	0	1	2	$+\infty$		
$1 - \frac{2}{x}$		-	-	0	+	
$\ln x$		-	0	+	+	
$f(x) - x$		+	0	-	0	+

Ainsi la courbe (C) est au dessous de la droite (D) sur l'intervalle $[1, 2]$.

5) Traçons sur le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C) (On admettra que la courbe (C) possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 2.4 et 2.5).



III- On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = \sqrt{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

1) Montrons par récurrence que

$1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n .

Pour $n=0$ on a $u_0 = \sqrt{3}$ donc $1 \leq u_0 \leq 2$

Donc la proposition est vraie pour $n=0$

Soit n un entier naturel, supposons

$1 \leq u_n \leq 2$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

On a $1 \leq u_n \leq 2$ est f strictement croissante sur $[1, 2]$ donc $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$

D'où $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

Car $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ et $f(u_n) = u_{n+1}$

Finalement $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n .

2) Montrons que la suite (u_n) est décroissante.

D'après la question II-4)c) $f(x) \leq x$ pour tout $x \in [1; 2]$

Or d'après la question précédente on a

$$\forall n \in \mathbb{N}; 1 \leq u_n \leq 2$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}; f(u_n) \leq u_n$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} \leq u_n$$

Ainsi la suite (u_n) est décroissante

3) Déduisons que la suite (u_n) est convergente puis déterminons sa limite.

On a f continue sur $[1, 2]$ et $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$ et comme la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 alors elle est convergente.

De plus sa limite est une solution de

$$\text{l'équation } f(x) = x$$

Or d'après la question II-4-b

$$f(x) = x \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2$$

Or (u_n) est décroissante Alors $\lim u_n = 1$

Examen national 2016 session rattrapage

I) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - x + x \ln x.$$

1) a) Montrer que $g'(x) = \ln x$; sur $]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (1 - x + x \ln x)' = -1 + x' \ln x + x(\ln x)' \\ &= -1 + \ln x + x \times \frac{1}{x} = -1 + \ln x + 1 = \ln x \end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in]0; +\infty[; g'(x) = \ln x$

b) Montrons que g est décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

Le signe de $g'(x)$ c'est le signe de $\ln x$, et puisque $\forall x \in]0; 1]; \ln x \leq 0$;

$$\text{Alors } \forall x \in]0; 1]; g'(x) \leq 0$$

Donc g est décroissante sur $]0; 1]$

et puisque $\forall x \in [1; +\infty[; \ln x \geq 0$;

$$\text{Alors } \forall x \in [1; +\infty[; g'(x) \geq 0$$

Donc g croissante sur $[1; +\infty[$.

2 - Calculons $g(1)$ et déduisons que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

$$g(1) = 1 - 1 + 1 \times \ln 1 = 1 - 1 + 1 \times 0 = 0$$

et puisque g admet un minimum au 1 ;

$$\text{Alors } \forall x \in]0; +\infty[; g(x) \geq g(1)$$

$$\text{Donc : } \forall x \in]0; +\infty[; g(x) \geq 0$$

II) Soit la fct f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x}$$

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et interpréter géométriquement

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 - 1 - 2x \ln x}{x^2} = -\infty \end{aligned}$$

(Car : $\lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 - 1 = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Interprétation géométrique :

la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe (C) .

2 - Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ et déduisons la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x} = 3$$

(Car: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

Interprétation géométrique :

la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

3 - a) Montrons que $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x} \right)' \\ &= \frac{2x}{x^4} - 2 \frac{(\ln x)'x - (\ln x)x'}{x^2} \\ &= \frac{2}{x^3} - 2 \frac{(1 - \ln x)}{x^2} \\ &= \frac{2}{x^3} - \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} \\ &= \frac{2 - 2x + 2x \ln x}{x^3} \\ &= \frac{2(1 - x + x \ln x)}{x^3} \\ &= \frac{2g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

b) Interprétation géométrique du résultat
 $f'(1) = 0$.

On a $f'(1) = \frac{2g(1)}{1} = 0$ et comme $f(1) = 2$,

Donc : (C_f) admet une tangente horizontale
 (T) au point $(1, 2)$.

c) Montrons que la fonction f est croissante
sur $]0; +\infty[$.

On a : $\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$.

Soit x de $]0; +\infty[$, on a $x^3 > 0$.

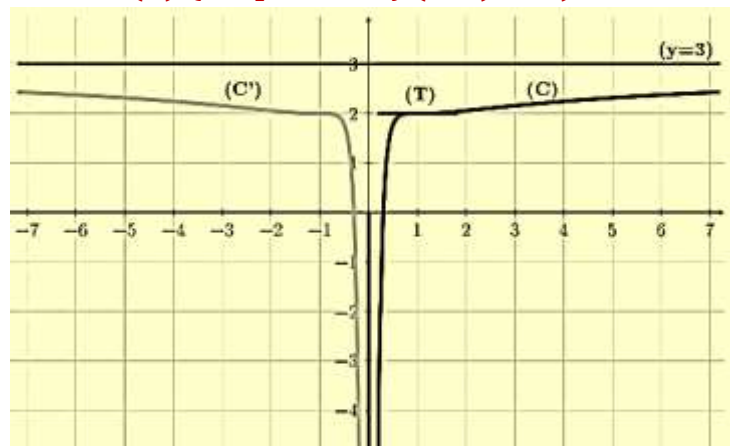
et d'après la question 2) partie I,

On a : $\forall x \in]0; +\infty[; g(x) \geq 0$.

Donc $\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) \geq 0$.

Donc : la fonction f est croissante sur $]0; +\infty[$.

4 - Construisons, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la
courbe (C) . (On prendra $f(0, 3) = 0$)



6 - Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$

par : $h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|}$.

a) Montrons que la fonction h est paire et que
 $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

Montrons que la fonction h est paire :

On a $D_h = \mathbb{R}^*$,

Donc pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a $-x \in \mathbb{R}^*$.

Soit x de $\mathbb{R}^*$. On a :

$$\begin{aligned} h(-x) &= 3 - \frac{1}{(-x)^2} - \frac{\ln((-x)^2)}{|-x|} \\ &= 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

Alors $h(-x) = h(x)$ pour tout x de D_h . Donc la
 fonction h est paire

Montrons que $h(x) = f(x)$ pour tout x de
 $]0; +\infty[$:

Soit x de $]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} h(x) &= 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|} \\ &= 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln(x)}{x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Car : $\forall x \in]0; +\infty[; |x| = x$ et $\ln(x^2) = 2\ln(x)$.

Donc $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$

b) Construisons, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$,
la courbe (C') représentant la fonction h .

On a : $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$,

Donc la courbe (C') c'est la courbe (C) sur
 $]0; +\infty[$.

Et on a la fonction h est paire, alors sa courbe
 est symétrique par rapport à l'axe des
 ordonnées. (voir le figure)

Correction du problème d'examen 2015

session annulée

On considère la fonction f à variable réelle
définie par : $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$

et (C_f) est la courbe représentative de f
dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$
d'unité 2cm.

Partie I

1) Soit D_f le domaine de définition de la
fonction f . Montrer que $D_f =]0, e[\cup$
 $]e, +\infty[$

$$x \in D_f \Leftrightarrow (x > 0 \text{ et } x(1 - \ln x) \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq 0 \text{ et } 1 - \ln x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \neq \ln e$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq e$$

$$\Leftrightarrow x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$$

Donc : $D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$

2)a) Calculer $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique des résultats.

On détermine le signe de $1 - \ln x$

$$\begin{aligned} 1 - \ln x \geq 0 &\Leftrightarrow 1 \geq \ln x \\ &\Leftrightarrow \ln e \geq \ln x \\ &\Leftrightarrow e \geq x \end{aligned}$$

x	0	e	$+\infty$
$1 - \ln x$		0	-

$$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{1}{x(1 - \ln x)} = -\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} 1 - \ln x = 0^- \text{ et } \lim_{x \rightarrow e^+} x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{1}{x(1 - \ln x)} = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow e^-} 1 - \ln x = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow e^-} x = e$$

Interpréter géométriquement ces deux résultats :

On a :

$$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = +\infty$$

D'où la droite (D) d'équation $x = e$ est une asymptote verticale à C_f .

b) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis en déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera sa direction.

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(1 - \ln x)} \\ &= 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln x = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Interpréter géométriquement ce résultat :

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

D'où (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$

c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(1 - \ln x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - x \ln x} = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^- \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \ln x = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$$

Interpréter géométriquement ce résultat

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

D'où la courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

3) a) Montrer que : $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2}$ pour tout x de D_f

On a la fonction f est dérivable sur D_f car elle est le produit et quotient de plusieurs fonctions dérivables sur D_f

On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{x(1 - \ln x)} \right)' \\ &= \frac{-(x(1 - \ln x))'}{(x(1 - \ln x))^2} \\ &= -\frac{1 - \ln x + x \times \left(-\frac{1}{x}\right)}{(x(1 - \ln x))^2} \\ &= -\frac{-\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2} = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2} \text{ pour tout } x \text{ de } D_f$$

b) Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, e[$ et sur $]e, +\infty[$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $\ln x$ sur D_f .

Sachant que : $\ln x \leq 0$ sur l'intervalle $]0, 1]$

donc $f'(x) \leq 0$ d'où f est strictement décroissante sur $]0, 1]$.

Sachant que : $\ln x \geq 0$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$

donc $f'(x) \geq 0$ sur chacun des intervalles $[1, e[$ et $]e, +\infty[$ d'où f est strictement croissante sur chacun des intervalles $[1, e[$ et $]e, +\infty[$.

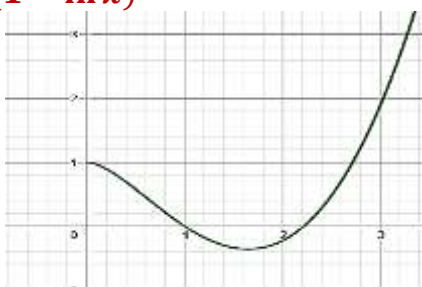
c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f

x	0	1	e	$+\infty$
f'		-	0	+
f	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
		1	$-\infty$	0

Partie II

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$
par : $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$

(C_g) est la courbe
représentative de
 g dans un repère
orthonormé (voir
figure)



1)a) Déterminer
graphiquement le nombre de solutions de
l'équation : (E): $x \in]0, +\infty[; g(x) = 0$

On cherche l'intersection de la courbe (C_g)
avec l'axe des abscisses, graphiquement le
nombre des points d'intersection est 2 .

Donc : l'équation (E) a deux solutions.

b) On donne le tableau de valeurs :

x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	-0,14	-0,02	0,12	0,28

Graphiquement la fonction g est continue sur
l'intervalle $[2,2; 2,3]$.

D'après le tableau :

$$g(2,2) \times g(2,3) = -0,02 \times 0,12 < 0.$$

En appliquant le théorème des valeurs
intermédiaires, il existe un réel α de $]2,2; 2,3$
tel que : $g(\alpha) = 0$

Donc : l'équation (E) admet une solution α tel
que : $2,2 < \alpha < 2,3$

2)a) Montrer que $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ pour
tout x de D_f .

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{1}{x(1 - \ln x)} - x \\ &= \frac{1 - x^2(1 - \ln x)}{x(1 - \ln x)} \\ &= \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)} \end{aligned}$$

Donc : $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ pour tout x de D_f

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$
coupe la courbe (C_f) en deux points
d'abscisses respectives 1 et α .

On étudie l'intersection de la courbe (C_f) et
la droite d'équation $y = x$, pour cela on
résout l'équation: $f(x) = x$ pour tout $x \in D_f$

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 0$$

Graphiquement on a deux solutions et
d'après ce qui précède $g(\alpha) = 0$ et $g(1) = 0$.
Donc La droite (Δ) d'équation : $y = x$ coupe la
courbe (C_f) en deux points respectives
d'abscisses 1 et α .

c) A partir de la courbe (C_g) , déterminer le
signe de g sur $[1; \alpha]$ et montrer que
 $f(x) - x \leq 0$ pour tout x de $[1; \alpha]$

Déterminer le signe de g sur $[1; \alpha]$:

Sur l'intervalle $[1; \alpha]$: on a la courbe (C_g) est
au-dessous de l'axe des abscisses, d'où $g(x) \leq 0$
pour tout $x \in [1; \alpha]$

Montrer que $f(x) - x \leq 0$ pour tout x de $[1; \alpha]$

Sur l'intervalle $[1; \alpha]$ on a $g(x) \leq 0$ et

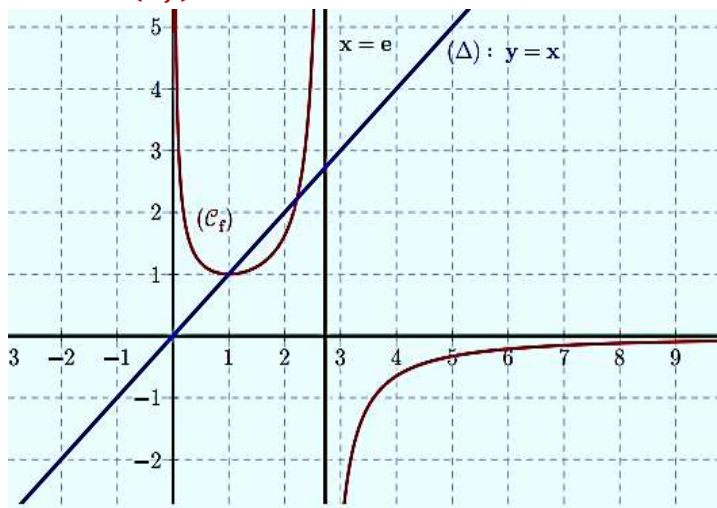
$$f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)} \geq 1 > 0 \text{ (d'après tableau de$$

variations de la fonction f sur $[1; e[$) et on a :
 $[1; \alpha] \subset [1; e[$ d'où :

$$f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)} = \frac{1}{x(1-\ln x)} \times g(x) \leq 0$$

pour tout x de $[1; \alpha]$

3) Construire dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la
courbe (C_f) et la droite (Δ)



Partie III

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

1) Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a : $1 \leq u_0 = 2 \leq \alpha$

(avec : $2, 2 < \alpha < 2, 3$) qui est vrais pour $n = 0$

On suppose que $1 \leq u_n \leq \alpha$

On montre $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$

D'après l'hypothèse de récurrence on a :

$$1 \leq u_n \leq \alpha$$

Donc : $1 \leq u_n \leq \alpha \Rightarrow f(1) \leq u_n \leq f(\alpha)$ (car la fonction f est croissante sur $[1; \alpha]$)

$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

Donc: $1 \leq u_n \leq \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (utiliser le résultat de la question II. 2. c)

Soit n de $\mathbb{N}$, on pose : $x = u_n$ et on a

$$u_n \in [1; \alpha] \text{ car } 1 \leq u_n \leq \alpha$$

D'après le résultat de la question II.2.c on a :

$$f(x) - x \leq 0 \text{ pour tout } x \text{ de } [1; \alpha]$$

Donc: $f(x) \leq x$ pour tout x de $[1; \alpha]$

$$\text{D'où : } x \in [1; \alpha] \Rightarrow f(x) \leq x$$

$$\Rightarrow f(u_n) \leq u_n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$$

Donc : la suite (u_n) est décroissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

- La suite (u_n) est décroissante ;
- La suite (u_n) est minorée par 1.

Donc la suite (u_n) est convergente.

La fonction f est continue sur $I = [1; \alpha]$ et

$$f(I) = f([1; \alpha]) = [f(1); f(\alpha)] = [1; \alpha] \subset [1; \alpha]$$

- On a $u_0 = 2 \in [1; \alpha]$
- (u_n) est convergente vers l avec $l \in \mathbb{R}$

Donc l est solution de l'équation : $f(x) = x$

$$\text{On a } f(x) = x \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \alpha$$

comme (u_n) est décroissante pour tout n de $\mathbb{N}$, d'où : $u_n \leq u_0$ c-à-d : $u_n \leq 2$

Donc: $l = 1$