

LIMITES ET CONTINUITE

(Partie 2)

I. Limite d'une fonction composée

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ par $f(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$.

On souhaite calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

On considère les fonctions u et v définie par : $u(x) = 2 - \frac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

Alors : $f(x) = v(u(x))$. On dit alors que f est la composée de la fonction u par la fonction v .

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 2$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{u(x)} = \lim_{X \rightarrow 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$.

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{2}$.

Théorème :

A, B, C peuvent désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

Si $\lim_{x \rightarrow A} u(x) = B$ et $\lim_{x \rightarrow B} v(x) = C$ alors $\lim_{x \rightarrow A} v(u(x)) = C$.

- Admis -

Méthode : Déterminer la limite d'une fonction composée

 **Vidéo** <https://youtu.be/DNU1M3li76k>

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x-1}{2x+3}}$

- On commence par calculer la limite de la fonction $x \mapsto \frac{4x-1}{2x+3}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

-

-

-et-

Levons l'indétermination :

$$\frac{4x-1}{2x+3} = \frac{x}{x} \times \frac{4-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}} = \frac{4-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{1}{x}\right) = 4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{x}\right) = 2$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{4}{2} = 2$

Et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-1}{2x+3} = 2$.

- Par ailleurs, $\lim_{X \rightarrow 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$.

- Comme limite de fonctions composées, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x-1}{2x+3}} = \sqrt{2}$.

II. Limites et comparaisons

1) Théorème de comparaison

Théorème : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a; +\infty[$, a réel, telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leq g(x)$.

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ (figure 1)

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ (figure 2)

- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ (figure 3)

- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (figure 4)

Par abus de langage, on pourrait dire que la fonction f pousse la fonction g vers $+\infty$ pour des valeurs de x suffisamment grandes.

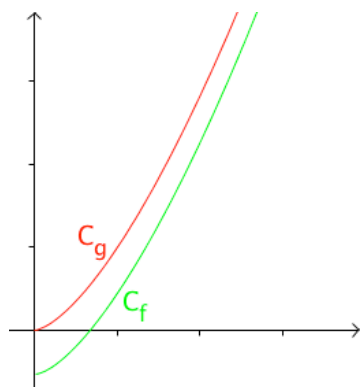


Figure 1

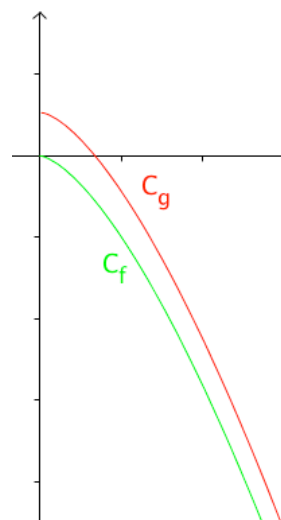


Figure 2

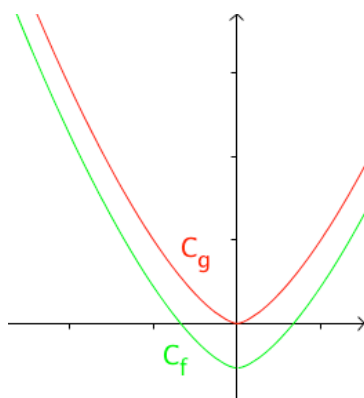


Figure 3

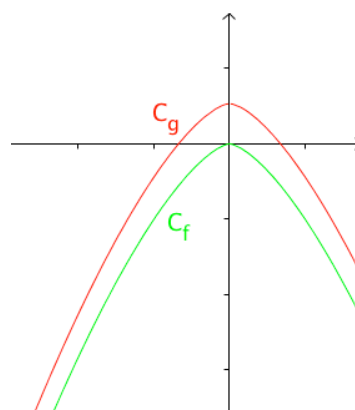


Figure 4

Démonstration dans le cas de la figure 1 :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc tout intervalle $]m; +\infty[$, m réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$

dès que x est suffisamment grand, soit : $f(x) \geq m$.

Or, dès que x est suffisamment grand, on a $f(x) \leq g(x)$.

Donc dès que x est suffisamment grand, on a : $g(x) \geq m$.

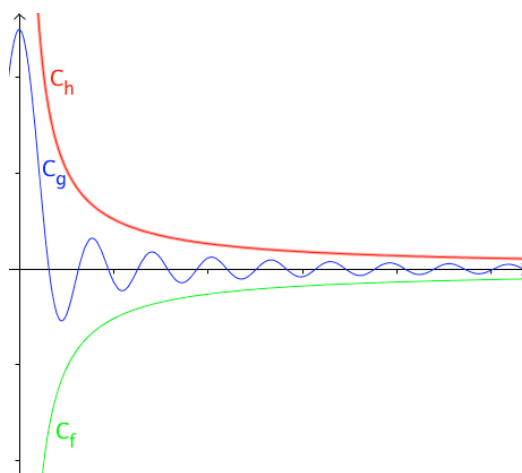
Et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

2) Théorème d'encadrement

Théorème des gendarmes : Soit f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]a; +\infty[$, a réel, telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L$.

Remarque : On obtient un théorème analogue en $-\infty$.



Par abus de langage, on pourrait dire que les fonctions f et h (les gendarmes) se resserrent autour de la fonction g pour des valeurs de x suffisamment grandes pour la faire tendre vers la même limite.

Ce théorème est également appelé le théorème du sandwich.

Méthode : Utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement

▶ Vidéo <https://youtu.be/OAtkpYMdu7Y>

▶ Vidéo <https://youtu.be/Eo1jvPphja0>

Calculer : 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x)$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1}$

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ n'existe pas. Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :

Pour tout x , $-1 \leq \sin x$ donc $x - 1 \leq x + \sin x$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x) = +\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ n'existe pas. Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :

Pour tout x , $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $-x \leq x \cos x \leq x$, car $x > 0$.

Et donc $-\frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{x \cos x}{x^2 + 1} \leq \frac{x}{x^2 + 1}$

Ou encore $-\frac{x}{x^2} \leq -\frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{x \cos x}{x^2 + 1} \leq \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{x}{x^2}$

Soit $-\frac{1}{x} \leq \frac{x \cos x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{x}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1} = 0$.

III. Continuité et théorème des valeurs intermédiaires



Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

1) Continuité

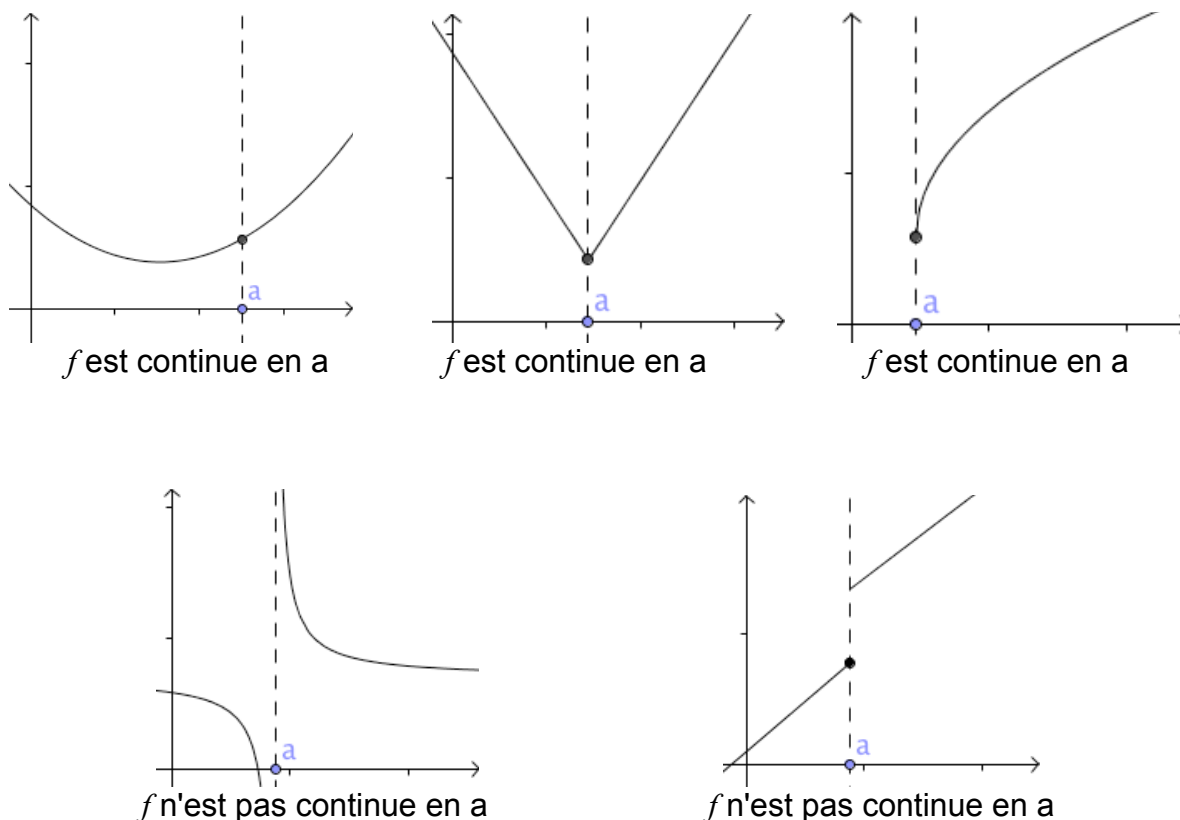
-

-

-et-

► Vidéo <https://youtu.be/XpjKserte6o>

Exemples et contre-exemples :



La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a .

- f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

- f est continue sur I si f est continue en tout point de I .

Exemples :

- Les fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$.

Remarque :

Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Théorème : Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

- Admis -

-

-

-et-

Méthode : Etudier la continuité d'une fonction

📺 Vidéo <https://youtu.be/03WMLyc7rLE>

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = -x + 2 & \text{pour } x < 3 \\ f(x) = x - 4 & \text{pour } 3 \leq x < 5 \\ f(x) = -2x + 13 & \text{pour } x \geq 5 \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Les fonctions $x \mapsto -x + 2$, $x \mapsto x - 4$ et $x \mapsto -2x + 13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.

Ainsi la fonction f est continue sur $] -\infty; 3[$, sur $[3; 5[$ et sur $[5; +\infty[$.

Etudions alors la continuité de f en 3 et en 5 :

$$- \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} (-x + 2) = -3 + 2 = -1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} (x - 4) = 3 - 4 = -1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = f(3) \text{ donc la fonction } f \text{ est continue en 3.}$$

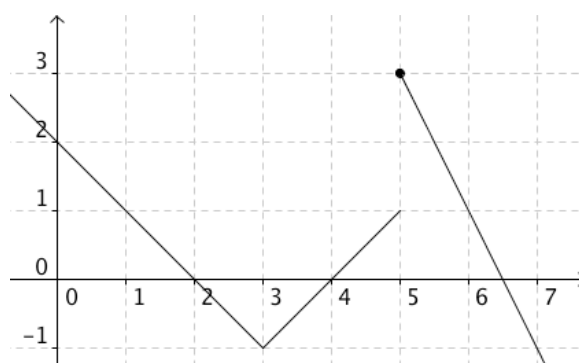
$$- \lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} (x - 4) = 5 - 4 = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} (-2x + 13) = -2 \times 5 + 13 = 3$$

La limite de f en 5 n'existe pas. On parle de limite à gauche de 5 et de limite à droite de 5.

La fonction f n'est donc pas continue en 5.

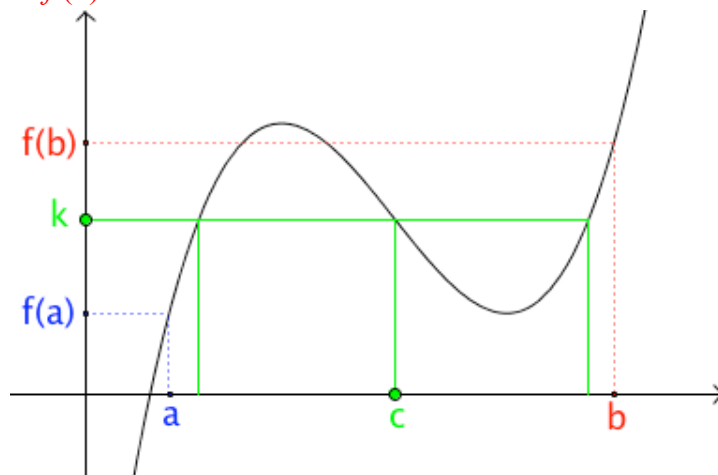
La fonction f est continue sur $] -\infty; 5[$ et sur $[5; +\infty[$.



2) Valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires :

On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle $[a ; b]$.
 Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



- Admis -

Conséquence :

Dans ces conditions, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a ; b]$.

Cas particuliers :

- Dans le cas où la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $[a ; b]$ alors le réel c est unique.
- Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Méthode : Résolution approchée d'une équation

► Vidéo <https://youtu.be/fkd7c3IAc3Y>

► Vidéo <https://youtu.be/UmGQf7gkvLg>

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution.

1) - Existence : $f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 = -2$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \times \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}\right) = +\infty$.

-

- -et-

La fonction f est continue sur l'intervalle $[2; +\infty[$ et elle change de signe.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c tel que $f(c) = 0$.

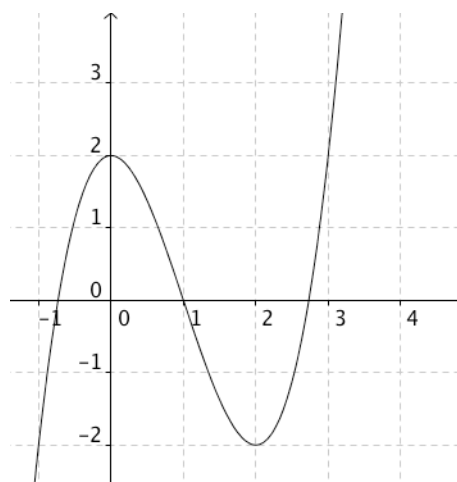
- **Unicité** : $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

Donc, pour tout x de $]2; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

- On en déduit qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = 0$.

2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des balayages successifs en augmentant la précision.



▶ **Vidéo TI** <https://youtu.be/MEkh0fxPakk>

▶ **Vidéo Casio** <https://youtu.be/XEZ5D19FpDQ>

▶ **Vidéo HP** <https://youtu.be/93mBoNOpEWg>

X	Y1
0	2
1	0
2	-2
3	2
4	10
5	22
6	40

La solution est comprise entre 2 et 3.

X	Y1
2	-2
2.1	-1.969
2.2	-1.872
2.3	-1.703
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704

La solution est supérieure à 2,6

X	Y1
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704
2.7	-.187
2.8	.432
2.9	1.159
3	2

La solution est comprise entre 2,7 et 2,8

X	Y ₁
2,7	-.187
2,71	-.1298
2,72	-.0716
2,73	-.0123
2,74	.04802
2,75	.10938
2,76	.17178

La solution est comprise entre 2,73 et 2,74.

On en déduit que $2,73 < c < 2,74$.

Remarque : Une autre méthode consiste à déterminer un encadrement par dichotomie.

TP Algorithmique "Dichotomie" :
