

**Niveau : Deuxième bac
sciences PC /SVT /STE**

Série corrigé 3 : Etude des fonctions

:



Série 3 :

**Etude des
fonctions**

**Deuxième bac science
expérimentale**



Exercice 01

1) Déterminer D_f puis étudier la nature des branches infinies de la courbe (C_f) dans chaque cas :

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$; b) $f(x) = \frac{3-2x^2}{(1+x)^2}$; c) $f(x) = 2x - \sqrt{x}$

2) On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x^2$
Étudier la concavité de la courbe (C_f) en précisant les points d'inflexions de (C_f) s'il existe

Exercice 02

1) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 5}$

- a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f
- b) Montrer que la droite (D) d'équation $x = -3$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f)
- c) En déduire D_E le domaine d'étude de f

2) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$
Montrons que $\Omega(-2, 3)$ est un point de symétrie de la courbe (C_f)

Exercice 03

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$

- 1) Étudier les branches infinies de (C_f)
- 2) Calculer f' sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f
- 3) Étudier la convexité de (C_f) , en précisant les points d'inflexions
- 4) Montrer que le point $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ est le centre de symétrie de (C_f)
- 5) Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-1, 0[$
- 6) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé

Exercice 04

Soit f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{3x^4+1}{3x^3}$

- 1) Étudier la parité de la fonction f et déduire D_E le domaine d'étude de la fonction f

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement,

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite $(D) : y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

b) Étudier la position relative de (C_f) et la droite (D) sur D_E

4) a) Calculer la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$

b) Donner le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$

5) Tracer (C_f) la courbe représentant la fonction f

6) Considérons la fonction g définie par $g(x) = \frac{3x^4+1}{3|x^3|}$

a) Étudier la parité de la fonction g

b) Tracer (C_g) la courbe de g en justifiant votre réponse

Exercice 05

Soit f est une fonction tel que $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

1) Vérifier que $D_f =]2, +\infty[$

2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite $(\Delta) : y = x$ est asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

c) Déterminer la position de (C_f) et (Δ)

3) a) Montrer que $\forall x \in]2, +\infty[; f'(x) = 1 + \frac{1}{2(\sqrt{x-2})^3}$

b) Dresser la table de variations de f

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]2, 3[$

5) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

6) Calculer $f(3)$ puis tracer (Δ) ; (C_f) et $(C_{f^{-1}})$

7) Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(f^{-1})'(2)$



Exercice 06

f une fonction définit sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-1}{x^3+1} & ; x \geq 1 \\ f(x) = x-1 + 2\sqrt{1-x} & ; x < 1 \end{cases}$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et Interpréter le résultat géométriquement

2) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

b) Etudier la branche infinie de (Cf) au voisinage de $-\infty$

3) a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 1 puis interpréter le résultat géométriquement

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche de 1 puis interpréter le résultat géométriquement

4) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

b) Montrer que : $\forall x \in]-\infty; 1[; f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$

c) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

5) Résoudre l'équation $f(x) = 0; x \in]-\infty; 1[$,

6) Tracer (Cf) dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$)

7) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définit sur J

a) Déterminer $g^{-1}(\frac{1}{2})$

b) Montrer que g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$; puis calculer $(g^{-1})'(\frac{1}{2})$

Exercice 07

A) Soit g une fct tel que ; $g(x) = 6x - 8x\sqrt{x} - \frac{1}{2}$

1) Déterminer D_f puis Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$

3) Dresser le tableau de variation de g

4) Montrer que : $\forall x \in [0; +\infty[; g(x) \leq 0$

B) Soit f une fct définit sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = (4x-1)\sqrt{x} - 4x^2 + 1$$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite 0

b) Interpréter le résultat géométriquement

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter les résultats

3) a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x}}$

b) Dresser le tableau de variation de f

4) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définit sur un intervalle J à déterminer

5) Calculer $f(1)$ puis tracer (Cf) et (Cf^{-1})

7) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(f^{-1})'(0)$

Exercice 08

Soit f une fct tel que : $f(x) = \frac{1}{x^2+x} - \sqrt{x^2+x}$

1) Déterminer D_f et Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement...

3) Montrer que la droite (Δ): $x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (Cf) et déduire D_E le domaine d'étude de f

4) a) Montrer que pour tout x dans $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = -(2x+1) \left(\frac{1}{(x^2+x)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \right)$$

b) Dresser le tableau de variation de f sur D_E

5) Etudier la branche infinie de (Cf) au voisinage de $+\infty$

6) Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$

7) Tracer (Cf) dans un repère orthonormé



Exercice 1 :

Soit f une fonction continue et définie sur $]1; +\infty[$ par sa table de variation suivante :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

- 1) Sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$, déterminer la nature des deux branches infinies de (Cf)
- 2) Tracer (Cf) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$
On donne $f(1,5) = -3$; $f(2) = 0$; $f(3) = 2$
- 3) Vérifier que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
- 4) Tracer (Cf^{-1}) le graphe de f^{-1} dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Exercice 2 :

f continue et définie sur $]-\infty; +\infty[$ par sa table de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-2	$+\infty$

- 1) Sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, déterminer les deux branches infinies de (Cf)
- 2) Tracer (Cf) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$
 $f(-1) = -1$; **0 point d'inflexion de (Cf)** ; $f(1) = 1$; $f(2) = 4$

Exercice 3

Soit f continue et définie sur $[0; +\infty[$ par sa table de variation :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0 +
$f(x)$	0 $+\infty$	-1	$+\infty$

- 1) Sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\infty$, déterminer la branches infinie de (Cf)
- 2) Tracer (Cf) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$
On donne $f(3) = 0$; $f(4) = 1$
- 3) Soit g la restriction de f sur $I = [1, +\infty[$
Tracer (Cg^{-1}) le graphe de g^{-1}

Exercice 4

f une fonction définie par sa table des variations :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	0 +
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	3	$+\infty$

- 1) Etudier les branches infinies de (Cf) sachant que
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = 0$;
- 2) Tracer (Cf) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$
On donne $f(-3) = -1$; $f(-2) = 0$; $f(-1) = 2$
et $f(\frac{1}{2}) = 5$; $f(2) = 3,5$

Corrigé de série 3

**Etude des
fonctions**

**Deuxième bac science
expérimentale**

<https://elboutkhili.jimdofree.com/>



Exercice 01

1) Déterminer D_f puis étudier la nature des branches infinies de la courbe (C_f) dans chaque cas : a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$

b) $f(x) = \frac{3-2x^2}{(1+x)^2}$; c) $f(x) = 2x - \sqrt{x}$; d) $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

2) On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x^2$

Étudier la concavité de la courbe (C_f) puis déterminer les points d'inflexions de (C_f) s'il existe

3) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3}$

Etudier la convexité de (C_f) en précisant leurs points d'inflexions

Solution :

1a)) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 3x^2 + 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty \end{aligned}$$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 - 3x^2 + 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty$$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

b) $x \in D_f \Leftrightarrow (1+x)^2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow 1+x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$$

D'où $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

Calcul de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x^2}{(1+x)^2} = -2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-2x^2}{(1+x)^2} = -2$$

Donc la droite d'équation $y = -2$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3-2x^2}{(1+x)^2} = -\infty$$

Donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale de la courbe C_f

c) $x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0$ donc $D_f = [0, +\infty[$

On calcul $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = +\infty$$

On calcul alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$$

On calcul alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{x} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$$

Donc la courbe C_f admet une branche parabolique de direction de la droite d'équation $y = 2x$, au voisinage de $+\infty$



2) On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x^2$

Étudier la concavité de la courbe (C_f)

La fonction f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$

Soit x dans $\mathbb{R}$,

On a : $f'(x) = 3x^2 + 2x$ et $f''(x) = 6x + 2$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$		0	
La convexité de la courbe (C_f)	concave $\cap$	le point $A(-\frac{1}{3}; f(-\frac{1}{3}))$ est point d'inflexion	convexe $\cup$

Exercice 02

1) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 5}$

a) Déterminer D_f

b) Montrons que la droite D d'équation $x = -3$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f)

c) En déduire D_E le domaine d'étude de f

2) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$

Montrons que $\Omega(-2, 3)$ est un point de symétrie de la courbe C_f

Solution :

1) a) On a :

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 \geq 0$$

$$D_f =]-\infty, -5] \cup [-1, +\infty[$$

b) Soit $x \in D_f$

$$x \in D_f \Leftrightarrow (x \leq -5 \text{ ou } x \geq -1)$$

$$\Leftrightarrow (-6 - x \geq -1 \text{ ou } -6 - x \leq -5)$$

$$\Leftrightarrow (-6 - x) \in D_f$$

D'autre part, pour tout $x \in D_f$:

$$\sqrt{x^2 + 6(-6 - x) + 5} = \sqrt{x^2 + 6x + 5}$$

Donc la droite (D): $x = -3$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

$$D_E = D_f \cap [-3; +\infty[= [-1, +\infty[$$

2) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$

Montrons que $\Omega(-2, 3)$ est un point de symétrie de la courbe C_f

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq -2$$

Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

Soit $x \in D_f$

$$* x \in D_f \Leftrightarrow x \neq -2 \Leftrightarrow -x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow -4 - x \neq -2$$

$$\Leftrightarrow (-4 - x) \in D_f$$

$$* f(-4 - x) = \frac{3x + 13}{x + 2}$$

$$= \frac{6(x + 2)}{x + 2} + \frac{1 - 3x}{x + 2} = 6 - f(x)$$

Donc, le point $\Omega(-2, 3)$ est un centre de symétrie de (C_f)

On peut montrer que * $f(2a - x) + f(x) = 2b$

$$D_E = D_f \cap [-2; +\infty[=]-2, +\infty[$$



:

Exercice 3

f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$

- 1) Etudier les branches infinies de (C_f)
- 2) Calculer f' sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f
- 3) Etudier la convexité (C_f) , en précisant les points d'inflexions de (C_f) s'il existe
- 4) Montrer que le point $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ est le centre de symétrie de (C_f)
- 5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -1, 0[$ et interpréter le résultat géométriquement
- 6) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé

Solution :

- 1) Etudier les branches infinies de (C_f)

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 3x^2 + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 - 3x^2 + 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty$$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

- 2) Calculer f' sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x dans $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \text{ ou } x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(0) = 2$	$f(1) = 1$	$+\infty$	

- 3) Etudier la convexité (C_f) , en précisant les points d'inflexions de la courbe (C_f) s'il existe

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x dans $\mathbb{R}$

$$f''(x) = 12x - 6 = 6(2x - 1)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

d'où le tableau de concavité suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
La convexité de la courbe (C_f)	concave $\cap$	le point $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ est point d'inflexion	convexe $\cup$

- 4) Montrer que le point $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ est le centre de symétrie de (C_f)

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$* x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (1 - x) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} * f(1 - x) + f(x) &= 2(1 - x)^3 - 3(1 - x)^2 + 2 + 2x^3 - 3x^2 + 2 \\ &= 2 + 6x^2 - 6x - 2x^3 - 3 + 6x - 3x^2 + 2 + 2x^3 - 3x^2 + 2 \\ &= 3 = 2 \times \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Donc, le point $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C_f)



5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-1, 0[$ et interpréter le résultat géométriquement

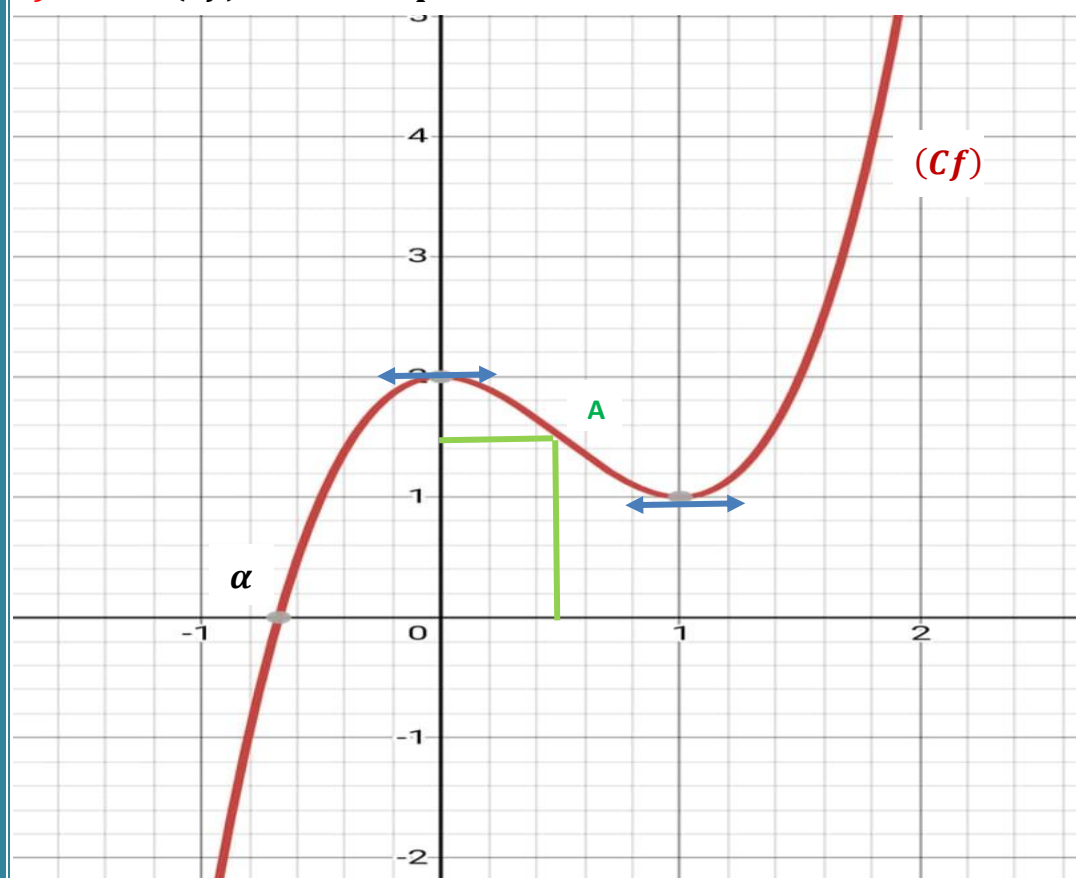
- La fonction f est continue sur l'intervalle $[-1; 0]$
- La fonction f est strictement croissante sur $[-1; 0]$
- Et on a : $f(-1) = -3$ et $f(0) = 2$ donc $f(-1) \times f(0) < 0$

D'où d'après T.V.I l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-1, 0[$

Interprétation géométrique

La courbe (C_f) coupe l'axe des abscisse en un point unique d'abscisse α tel que $\alpha \in]-1, 0[$

6) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé



Exercice 04

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{3x^4 + 1}{3x^3}$$

- 1) Etudier la parité de la fonction f et déduire D_E le domaine d'étude de la fonction f
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement
- 3) a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$
b. Etudier la position relative de (C_f) et la droite (D) sur D_E
- 4) a. Calculer la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$
b. Donner le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$
- 5) Tracer (C_f) la courbe représentant la fonction f
- 6) Considérons la fonction g définie par $g(x) = \frac{3x^4 + 1}{3|x^3|}$
a. Etudier la parité de la fonction g
b. Tracer (C_g) la courbe de g en justifiant votre réponse

Solution :

1) Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$x \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow x \neq 0 \Leftrightarrow -x \neq 0 \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R}^*$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{3(-x)^4 + 1}{3(-x)^3} \\ &= \frac{3x^4 + 1}{-3x^3} = -f(x) \end{aligned}$$

Donc la fonction f est **impaire**

D'où on peut réduire l'étude f seulement sur

$$D_E = \mathbb{R}^* \cap [0; +\infty[=]0; +\infty[$$

Donc $D_E =]0; +\infty[$

Remarque : La courbe (C_f) est symétrique par rapport à 0



:

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^4 + 1}{3x^3} = +\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^4 + 1 = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^3 = 0^+$$

Donc la droite d'équations $x = 0$ c-à-dire l'axe des ordonnées est une asymptote verticale à (C_f)

1. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est un asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 1}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 1}{3x^3} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 1 - 3x^4}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x^3} = 0 \end{aligned}$$

Donc la droite (D) d'équation $y = x$ est un asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

b. Etudier la position relative de (C_f) et la droite (D) sur D_E

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $f(x) - x = \frac{1}{3x^3} > 0$

Donc (C_f) est située aux dessus de la droite (D) sur $]0; +\infty[$

4)a) Calculer la dérivée de la fonction f

La fonction f est dérivable sur tout intervalle inclut dans $\mathbb{R}^*$, Car c'est une fonction rationnelle

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{12x^3 \times 3x^3 - (3x^4 + 1) \times 9x^2}{(3x^3)^2} \\ &= \frac{9x^2(4x^4 - 3x^4 - 1)}{9x^6} \\ &= \frac{x^4 - 1}{x^4} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^4} \end{aligned}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$

On a $x^2 + 1 > 0$ et $x^4 > 0$, donc Le signe de f' c'est le signe de $x^2 - 1$

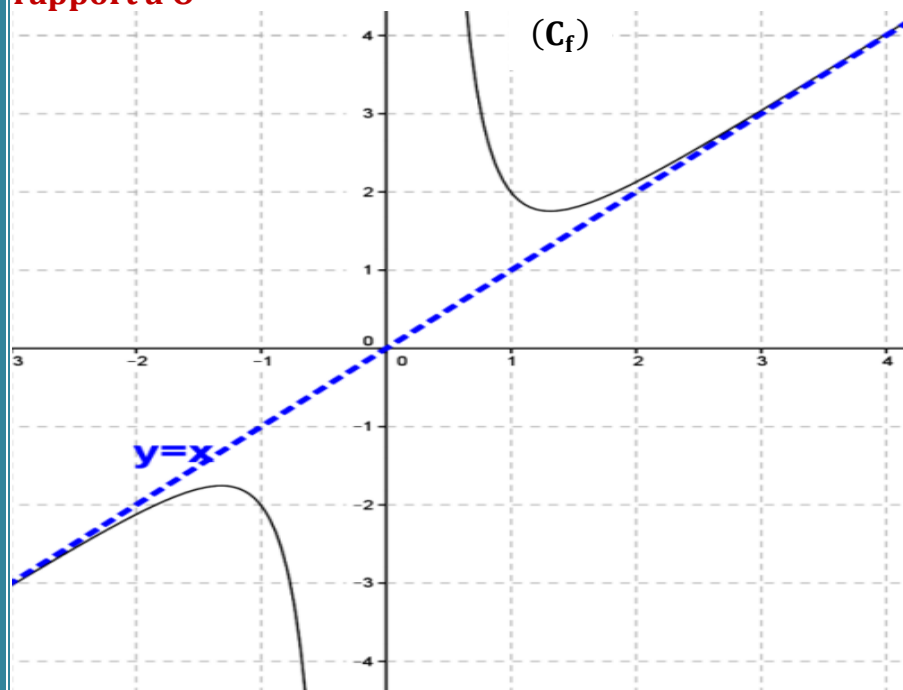
$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{aligned}$$

D'où tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$

1. Tracer (C_f) la courbe représentant la fonction f

La fonction f est impaire donc courbe (C_f) est symétrique par rapport à 0



5)a Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$x \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -x \neq 0 \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R}^*$$

$$g(-x) = \frac{3(-x)^4 + 1}{3|-x^3|} = \frac{3x^4 + 1}{3|x^3|} = g(x)$$

Donc la fonction g est paire



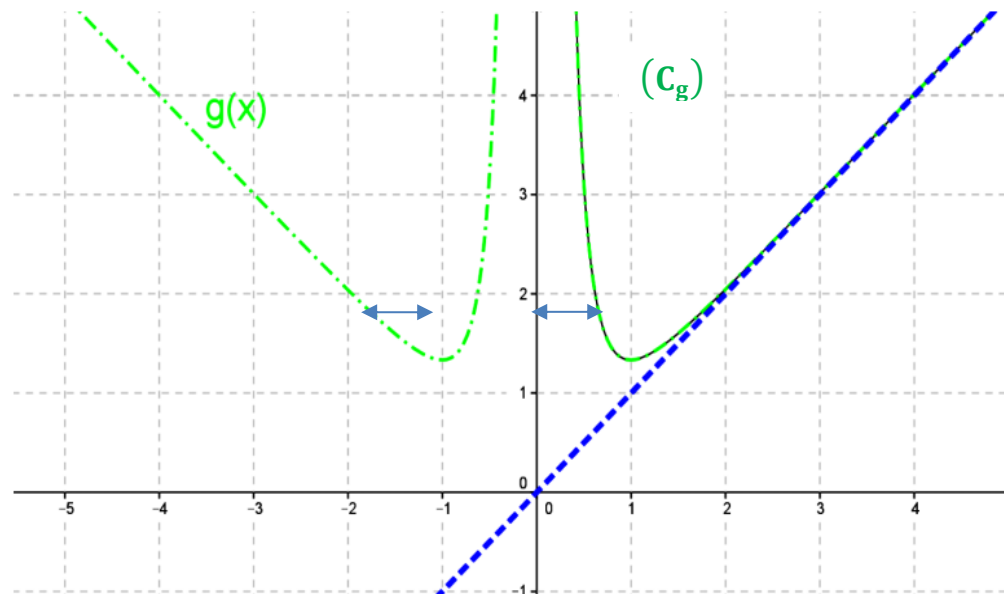
:

b. Tracer (C_g) la courbe de g en justifiant votre réponse

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a : $g(x) = f(x)$

Donc la courbe (C_g) est confondue à (C_f) $]0; +\infty[$

Et comme la fonction g est paire donc la courbe (C_g) est symétrique par rapport à la l'axe des ordonnées



Exercice 06

f une fonction définit sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-1}{x^3+1} & ; x \geq 1 \\ f(x) = x-1+2\sqrt{1-x} & ; x < 1 \end{cases}$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et Interpréter le résultat géométriquement

2) a) Montrer que: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

b) Etudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$

3) a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 1 puis interpréter les résultats géométriquement

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche de 1 puis interpréter les résultats géométriquement

4) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

b) Montrer que: $\forall x \in]-\infty; 1[; f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$

c) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

5) Résoudre l'équation $f(x) = 0$; $x \in]-\infty; 1[$,

Puis interpréter le résultat géométriquement

6) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

7) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définit sur un intervalle J à déterminer

b) Déterminer $g^{-1}(\frac{1}{2})$

c) Montrer que g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ puis calculer $(g^{-1})'(\frac{1}{2})$

Solution :

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et Interpréter le résultat géométriquement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-1}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

Donc la droite (D) d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$

2) a) Montrer que: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x-1+2\sqrt{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x-1+2|x|\sqrt{\frac{1-x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{\frac{1-x}{x^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} \right) = -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1+2\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x}+2\sqrt{\frac{1-x}{x^2}})}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{\frac{1-x}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x-1+2\sqrt{1-x}-x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -1+2\sqrt{1-x} = +\infty$$

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = +\infty$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$

$$3)a) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x^3-1}{x^3+1}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^3+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x+1}{x^3+1} = \frac{3}{2}$$

Donc la fonction f est dérivable à droite de 1 et $f'_d(1) = \frac{3}{2}$

Donc la courbe (C_f) admet une demi-tangente en 1 d'équation :

$$y = f'_d(1)(x-1) + f(1)$$

$$\text{Donc : } y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1+2\sqrt{1-x}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x-1} + \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{|x-1|} \times \sqrt{|x-1|}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - \frac{2}{\sqrt{1-x}} = -\infty$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à gauche de 1

Donc la courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale en 1 dirigée vers le haut

4)a) Soit $x \in]1; +\infty[$

f est dérivable sur $]1; +\infty[$ (fonction rationnelle)

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^3+1) - 3x^2(x^3-1)}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{6x^2}{(x^3+1)^2} > 0$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

b) Montrer que : $\forall x \in]-\infty; 1[; f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$

a) Soit $x \in]-\infty; 1[$

f est dérivable sur $]-\infty; 1[$ (Somme de deux fonctions)

$$f'(x) = 1 + 2 \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$$

c) On a f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

Soit $x \in]-\infty; 1[$,

$$\text{On a } f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$$

Donc $\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x}) > 0$ donc le signe de f' sur $]-\infty; 1[$ est le signe de $-x$ qui s'annule en 0

D'où le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	- +	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 1	$\searrow$ 0	$\nearrow +\infty$



5) Résoudre l'équation $f(x) = 0$; $x \in]-\infty; 1[$, puis interpréter le résultat géométriquement

$$f(x) = 0 ; x \in]-\infty; 1[\Leftrightarrow x - 1 + 2\sqrt{1-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -(1-x) - 1 + 2\sqrt{1-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{1-x} (\sqrt{1-x} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{1-x} = 0 \text{ ou } \sqrt{1-x} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 0 \text{ ou } \sqrt{1-x} = 2$$

$$\Leftrightarrow 1-x = 0 \text{ ou } 1-x = 2$$

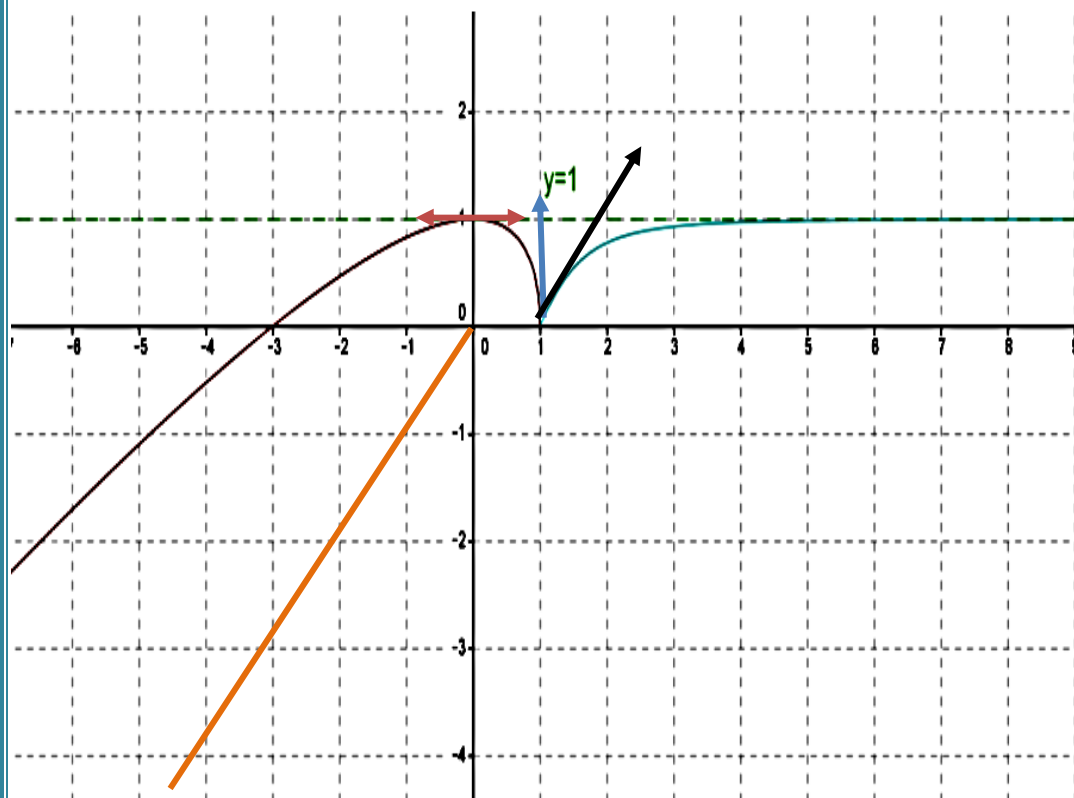
$$\Leftrightarrow x = 1 \notin]-\infty; 1[\text{ ou } x = -3$$

Donc $S = \{-3\}$

Interprétation géométrique :

(Cf) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -3

6) Tracer (Cf) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$



8) Soit g la restriction de f sur $I =]1, +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

➤ la fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ donc elle est continue sur $]1, +\infty[$, d'où la fonction g est continue sur $]1, +\infty[$

➤ la fonction f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$ donc g est strictement croissante sur $]1, +\infty[$

D'où g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J et on a : $J = f(I)$

$$J = g(I) = g(]1, +\infty[) =]g(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[=]0, 1[$$

b) Déterminer $g^{-1}(\frac{1}{2})$

$$g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = y \Leftrightarrow g(y) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3 - 1}{y^3 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3 + 1 - 1 - 1}{y^3 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{y^3 + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{y^3 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y^3 + 1 = 4 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{3}$$

$$\text{Donc } g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[3]{3}$$

c) La fonction g est dérivable en $\sqrt[3]{4}$ et on a :

$$g'(\sqrt[3]{3}) = \frac{6(\sqrt[3]{3})^2}{(\sqrt[3]{3}^3 + 1)^2} = \frac{6\sqrt[3]{9}}{16} \neq 0$$

D'où la fonction g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$

$$(g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{g'(\sqrt[3]{3})} = \frac{16}{6\sqrt[3]{9}}$$



Exercice 05

f est une fonction tel que $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

1) Vérifier que $D_f =]2, +\infty[$

2)a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite $(\Delta) : y = x$ est asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

c) Déterminer la position de (C_f) et (Δ)

3)a) Montrer que $\forall x \in]2, +\infty[; f'(x) = 1 + \frac{1}{2(\sqrt{x-2})^3}$

b) Dresser la table de variations de f

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]2, 3[$

5) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

6) Calculer $f(3)$ puis tracer (Δ) ; (C_f) et $(C_{f^{-1}})$

7) Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(f^{-1})'(2)$

Solution :

1) $x \in D_f \Leftrightarrow \sqrt{x-2} \neq 0$ et $x-2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x-2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 2$$

Donc: $D_f =]2, +\infty[$

2)a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x - \frac{1}{\sqrt{x-2}} = -\infty$

Car: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = 0^+$

Interprétation géométrique de $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

La droite (D) d'équations $x = 2$ est asymptote verticale à (C_f)

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{\sqrt{x-2}} = +\infty$

Car: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 0$

Montrons que la droite $(\Delta) : y = x$ est asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{\sqrt{x-2}} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\sqrt{x-2}} = 0 \end{aligned}$$

c) Déterminer la position de (C_f) et (Δ)

$$* f(x) - x = -\frac{1}{\sqrt{x-2}} < 0$$

Donc la courbe (C_f) est en dessous de la droite (Δ)

3)a) Montrer que $\forall x \in]2, +\infty[; f'(x) = 1 + \frac{1}{2(\sqrt{x-2})^3}$

$$\text{Rappel : } \left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{U'}{U^2} \text{ et } \sqrt{U}' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$$

Soit $x \in]2, +\infty[$

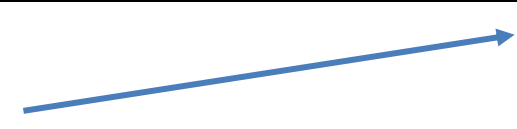
$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}^2} \\ &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-2}^3} \end{aligned}$$

b) On dresse la table de variations de f

On a $\forall x \in]2, +\infty[; f'(x) = 1 + \frac{1}{2(\sqrt{x-2})^3} > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]2, +\infty[$

x	2	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$





:

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]2, 3[$

- La fonction f est continue sur l'intervalle $[2; 3]$
- La fonction f est strictement croissante sur $]2, 3[$
- Et on a : $f(]2, 3[) =]\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)[=]-\infty; 2[$
Donc $0 \in f(]2, 3[)$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]2, 3[$

Interprétation géométrique

La courbe (Cf) coupe l'axe des abscisse en un point unique d'abscisse α tel que $\alpha \in]2, 3[$

5) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

- la fonction f est dérivable sur $]2, +\infty[$ donc elle est continue sur $]2, +\infty[$,
- la fonction f est strictement croissante sur $]2, +\infty[$
D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J et on a : $J = f(I)$

$$J = f(I) = f(]2, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[\\ =]-\infty; +\infty[$$

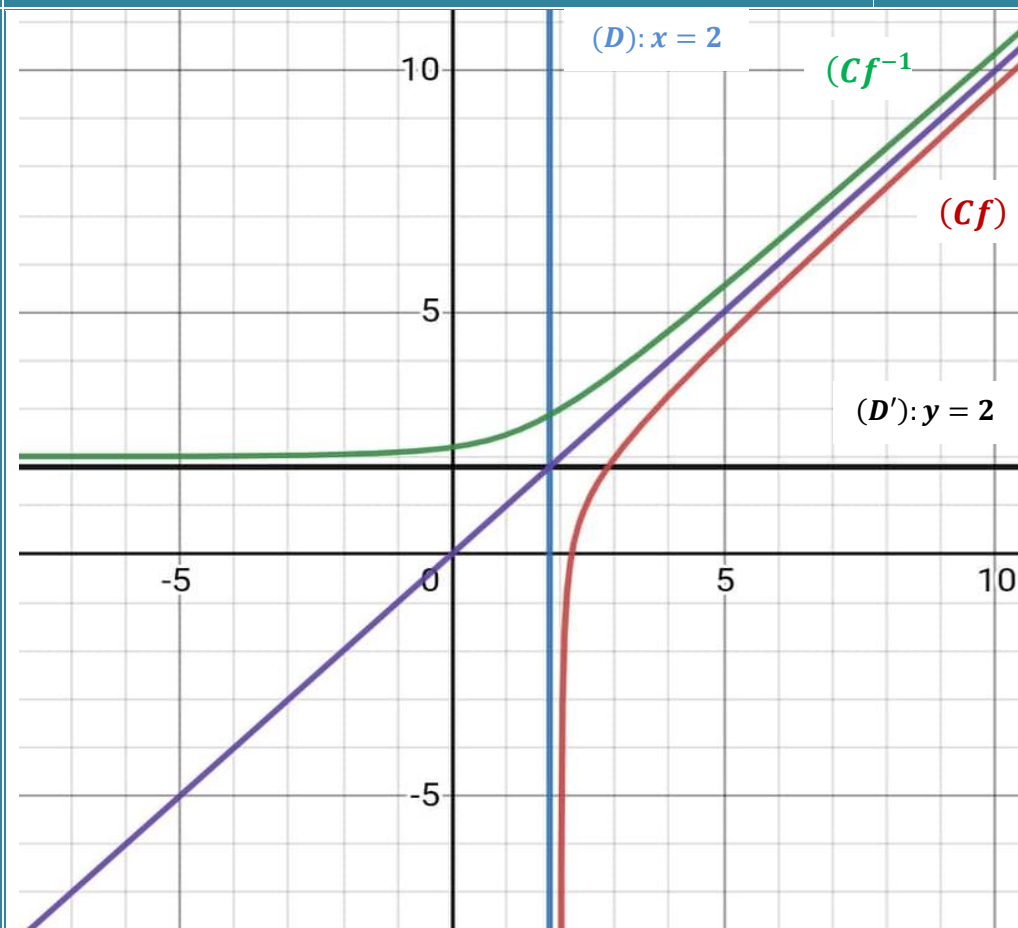
6) Calculer $f(3)$ puis tracer (Δ) ; (Cf) et (Cf^{-1})

On a $f(3) = 2$

Construction de (Cf^{-1})

Les courbes (Cf) et (Cf^{-1}) sont symétriques par rapport à la droite $(\Delta): y = x$

On a La droite (D) d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à (Cf) donc La droite (D') d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à (Cf^{-1})



7) Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(f^{-1})'(2)$

On a $f(3) = 2$

La fonction f est dérivable en 3 et on a :

$$f'(3) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{3-2}}^3 = \frac{3}{2} \neq 0$$

D'où la fonction f^{-1} est dérivable en 2 et on a :

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$