

**Deuxième bac sciences
PC/SVT/STE**

Série corrigée 1

Révision : Notions de base

Exercic 01 : Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x + 1}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + 3}{x - 1}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 3}{x^2 - 3x + 2}$
 4) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x - 3}{-x^2 + 3x - 2}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right)$; 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x}$

Exercic 02 : Calculer les limites suivantes

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$; 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 + 2x^7 - 6x + 1$
 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^4 - 6x + 5}$; 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 + x^2 - 3}{x^4 - 6x + 5}$; 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^3 - 6x + 5}$
 6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 27}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x - 1}$

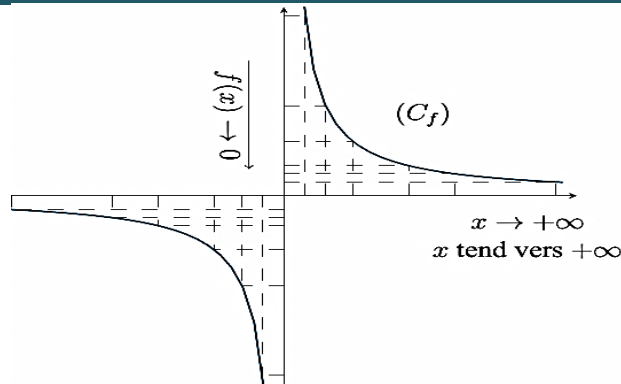
Exercic 03 : Calculer les limites suivantes

- 1) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}$; 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1}$
 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} + 2x$

Exercic 04

Soit f une fonction
 définit sur $\mathbb{R}^*$ par son
 graphe :

- 1) Déterminer
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$



- 2) Dresser le tableau des variations de la fonction de f

Exercic 05

f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = x^2 - 4x ; x \in]-\infty, 1] \\ f(x) = x - 3 + \frac{2}{x-3} ; x \in]1, 3[\cup]3, +\infty[\end{cases}$

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Exercic 06

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} ; x \neq 5 \\ f(5) = 4 \end{cases}$

- 1) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$
 2) Montrer que f est dérivable en 5
 3) Déterminer l'équation de (T) la tangente à (Cf) en 5

Exercic 07

Calculer $f'(x)$: 1) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x} + 1$

2) $f(x) = (2x^2 - 5x)(3x - 2)$; 3) $f(x) = \frac{6x-5}{x^2+1}$; 4) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$

5) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 1}$; 6) $f(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4$

Exercic 08

Soit f une fonction définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x + 1$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 2) Calculer $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis étudier les variations de f
 3) Déterminer l'équation de (T) la tangente à (Cf) en 0

Exercic 09

Soit f une fonction définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$

- 1) Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f
 2) Dresser le tableau des variations de f

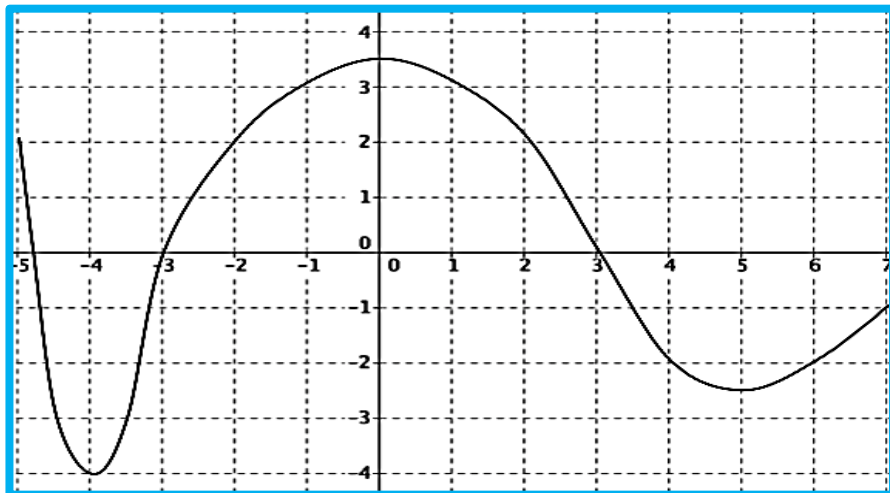
Exercic 10

Soit f une fonction tel que $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

- 1) Déterminer D_f puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0
 b) Donner une interprétation géométrique du résultat
 a) Montrer que $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$ pour tout $x \in]0; +\infty[$, puis étudier les variations de f sur D_f
 b) Dresser le tableau de variations de f

Exercice 12

Soit f une fonction définie par son graphe :



Déterminer graphiquement :

- 1) L'ensemble de définition de la fonction f
- 2) L'image de -5 ; -4 ; -3 ; 3 ; 4 et 7 par f .
- 3) Les antécédents de 2 par la fonction f .
- 4) Donner les variations de la fonction.
- 5) Donner les extremums de f en précisant où ils sont atteints.
- 6) Résumer les résultats précédents dans un tableau de variations
- 7) Déterminer le nombre des solutions de l'équation $f(x) = 0$

Exercice 14

Soit f une fonction dont le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-2	1	$-\infty$	-1

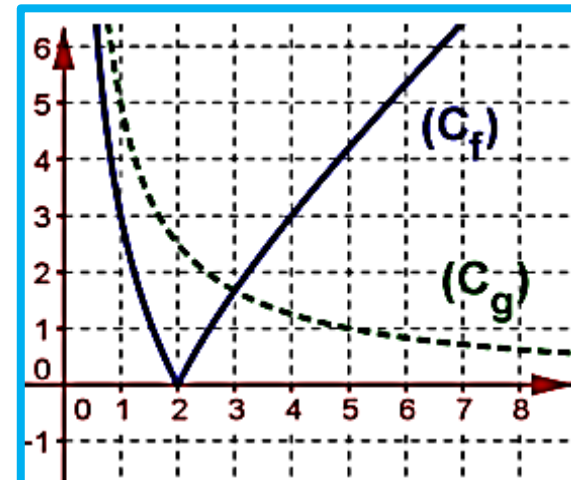
Déterminer D_f l'ensemble de définition de f ; $f(-3)$; $f(0)$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

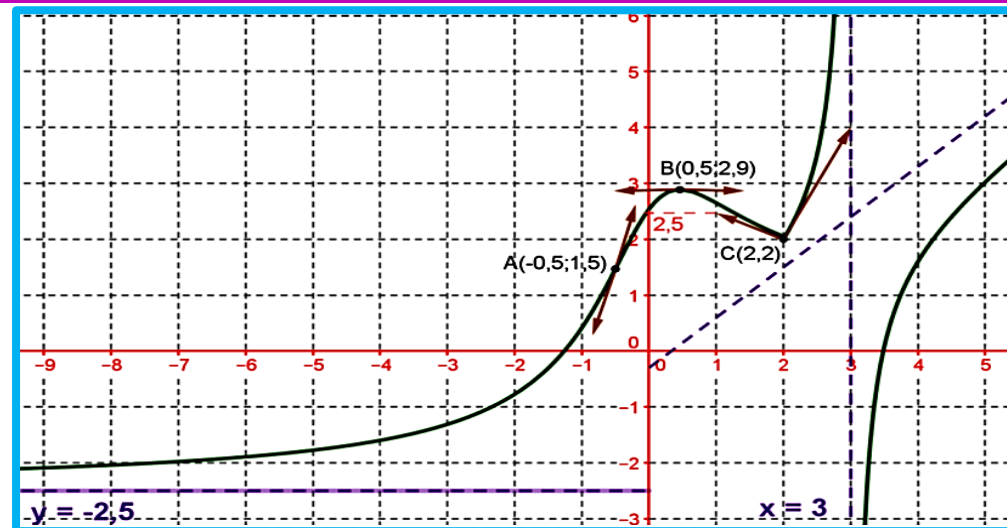
Exercice 13

f et g deux fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par leurs graphes ci-contre

- 1) Dresser la table de variations de f et g
- 2) Résoudre les équations $f(x) = 0$; $f(x) = 3$
Et $g(x) = f(x)$
- 3) Résoudre les inéquations : $f(x) < 3$;
 $f(x) < g(x)$ et $f(x) \geq g(x)$



Exercice 15 Soit f une fonction définie par la courbe suivante



- 1) Déterminer graphiquement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2f(x)+5}$

- 2) Déterminer $f'(\frac{1}{2})$; $f'(-\frac{1}{2})$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ et $f_g'(2)$

Exercice 01 : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x + 1}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + 3}{x - 1}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 3}{x^2 - 3x + 2}$
 4) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x - 3}{-x^2 + 3x - 2}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right)$; 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x}$

Solution de l'exercice 01

1) On a : $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^3 + x^2 - 3 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x + 1} = \frac{0}{2} = 0$

2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + 3}{x - 1}$

On a ; $\lim_{x \rightarrow 1^-} 2x + 3 = 5$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} x - 1 = 0$

Donc il faut savoir le signe de $x - 1$ à gauche de 1

Résoudrons l'équation : $x - 1 = 0$ donc $x = 1$

Le tableau de signe de $x - 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} x - 1 = 0^-$ et on a : $\lim_{x \rightarrow 1^-} 2x + 3 = 5$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + 3}{x - 1} = \frac{5}{0^-} = -\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 3}{x^2 - 3x + 2}$

On a ; $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - x - 3 = -3$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 3x + 2 = 0$

Donc il faut savoir le signe de $x^2 - 3x + 2$ à gauche de 1

Résoudrons l'équation : $x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$

Donc les solutions sont : $x = \frac{3 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2$ ou $x = \frac{3 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 1$

Le tableau de signe de $x^2 - 3x + 2$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 3$	+	0	- 0	+

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 3x + 2 = 0^+$ et on a : $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - x - 3 = -3$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

4) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x - 3}{-x^2 + 3x - 2} = \frac{-1}{0}$

De même que 3) d'après le tableau de signe de $-x^2 + 3x - 2$

On a : $\lim_{x \rightarrow 2^+} -x^2 + 3x - 2 = 0^-$ Et on a : $\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - x - 3 = -1$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x - 3}{-x^2 + 3x - 2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

5) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) = "1 - \frac{1}{0^+}" = -\infty$ car $\sqrt{x} - 1 > 0$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x} = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Exercice 02

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$; 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 + 2x^7 - 6x + 1$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^4 - 6x + 5}$; 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 + x^2 - 3}{x^4 - 6x + 5}$; 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^3 - 6x + 5}$;

6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 27}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x - 1}$;

Solution de l'exercice 02

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 = -\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 + 2x^7 - 6x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^7 = +\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^4 - 6x + 5}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - 3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 - 6x + 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

1^{ère} méthode : La fonction est une fonction rationnelle donc on peut utiliser un théorème de cours comme suit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^4 - 6x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^3 \times x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

2^{ème} méthode : Par factorisation par le plus haut degré

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^4 - 6x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(2 + \frac{x^2}{x^3} - \frac{3}{x^3})}{x^4(1 - \frac{6x}{x^4} + \frac{5}{x^4})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3})}{x(1 - \frac{6}{x^3} + \frac{5}{x^4})} = 0$$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 + x^2 - 3}{x^4 - 6x + 5}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 + x^2 - 3}{x^4 - 6x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 \times x}{x^4 \times x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^3 - 6x + 5}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^3 - 6x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

On a : $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 4 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 2} x - 2 = 0$

Donc il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{0}{0}$ ".

• Levons l'indétermination à l'aide d'une factorisation par $x - 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

7) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 27}$ on a $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 3} x^3 - 27 = 0$

Donc il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{0}{0}$ ".

• Levons l'indétermination à l'aide d'une factorisation par $x - 3$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^3 - 27} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{x^2 + 3x + 9} \\ &= \frac{6}{27} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

8) On a : $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^3 + x^2 - 3 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$

Donc il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{0}{0}$ ".

• Levons l'indétermination à l'aide d'une factorisation par $x - 1$

1^{ère} méthode : Factorisation par une division euclidienne

$2x^3 + x^2 - 3$	$x - 1$
$- 2x^3 + 2x^2$	$2x^2 + 3x + 3$
$0 + 3x^2 - 3$	
$- 3x^2 + 3x$	
$0 + 3x - 3$	
$- 3x + 3$	
$0 + 0$	

On obtient : $2x^3 + x^2 - 3 = (x - 1)(2x^2 + 3x + 3)$

2^{ème} méthode : Factorisation par l'algorithme de HORNER :

x^3	x^2	x	1	
2	1	0	-3	1
	2	3	3	

On obtient : $2x^3 + x^2 - 3 = (x - 1)(2x^2 + 3x + 3)$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(2x^2 + 3x + 3)}{x - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 + 3x + 3 = 8$$

Exercice 03 : Calculer les limites suivantes

1) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$; 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-3x+1}$
 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2-3x+1} + 2x$

Solution de l'exercice 03

1) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

On a : $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-1}-2 = \sqrt{5-1}-2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 5} x-5 = 5-5 = 0$

Donc il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{0}{0}$ ".

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}^2-1^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{1+x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x}+1) = 2 \end{aligned}$$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-3x+1}$

1ère méthode : On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2-3x+1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2, = +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-3x+1} = +\infty$

2ème méthode

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-3x+1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} \times \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = \square + \infty \\ \text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x &= +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x}$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

• Levons l'indétermination à l'aide d'une factorisation :

1ère méthode

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = +\infty \quad \text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \end{aligned}$$

2ème méthode :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\frac{x}{\sqrt{x}} - 2\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x} - 2) = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - 2 = +\infty$

3ème méthode

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} + 1^2 - 1^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - 1)^2 - 1 = +\infty \quad ; \text{ car et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - 1 = +\infty \end{aligned}$$

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} - 2x$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} + 2x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)} + 2x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2} \times \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \times \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 \right) \\ &= \boxed{} - \infty \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Exercic 04

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par son graphe :

1) Déterminer

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \end{aligned}$$

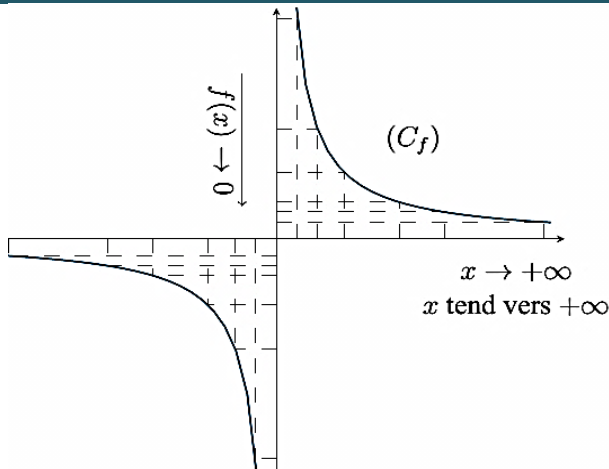
2) Dresser le tableau des variations de la fonction f

Solution de l'exercice 04

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

Le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$	0



Exercic 05

f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = x^2 - 4x ; x \in]-\infty, 1] \\ f(x) = x - 3 + \frac{2}{x-3} ; x \in]1, 3[\cup]3, +\infty[\end{cases}$

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Solution de l'exercice 05

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 4x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 3 + \frac{2}{x-3} = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-3} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x - 3 + \frac{2}{x-3} = \frac{2}{0}$$

Donc il faut savoir le signe de $x - 3$

Résoudrons l'équation : $x - 3 = 0$ donc $x = 3$

Le tableau de signe de $x - 3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x - 3$	$-$	0	$+$

Donc $\lim_{x \rightarrow 3^+} x - 3 = 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x - 3 + \frac{2}{x-3} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x - 3 + \frac{2}{x-3} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) ???$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 4x = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x - 3 + \frac{2}{x-3} = -3$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -3$

Exercic 06

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x-5} & ; x \neq 5 \\ f(5) = 4 \end{cases}$

1) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$

2) Montrer que f est dérivable en 5

3) Déterminer l'équation de (T) la tangente à (Cf) en 5

Solution :

1) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x-1)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x-1) = 4$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$

On dit que la fonction f est continue en 5

2) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 5$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{x^2-6x+5}{x-5} - 4}{x-5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{(x-5)(x-1)}{x-5} - 4}{x-5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-1) - 4}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x-5} = 1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc la fonction f est dérivable en 5 et $f'(5) = 1$

3) Déterminer l'équation de (T) la tangente à (Cf) en 5

La droite (T) d'équation $y = f'(5)(x-5) + f(5)$

Donc : $(T): y = x - 1$

Exercic 07

Calculer $f'(x)$: 1) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x} + 1$

2) $f(x) = (2x^2 - 5x)(3x - 2)$; 3) $f(x) = \frac{6x-5}{x^2+1}$; 4) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$

5) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 1}$; 6) $f(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4$

Solution de l'exercice 07

1) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x} + 1$; $D_f =]0; +\infty[$

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ car c'est une somme des fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3 \times 3x^2) - (2 \times 2x^1) + (3 \times 1) + \left(2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - \left(3 \times \frac{-1}{x^2}\right) + 0 \\ &= 9x^2 - 4x + 3 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

2) $f(x) = (2x^2 - 5x)(3x - 2)$; $D_f = \mathbb{R}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une polynôme

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x)v(x) \text{ avec } u(x) = 2x^2 - 5x \rightarrow u'(x) = 4x - 5 \\ v(x) &= 3x - 2 \rightarrow v'(x) = 3 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= (4x - 5)(3x - 2) + (2x^2 - 5x) \times 3 \\ &= 12x^2 - 8x - 15x + 10 + 6x^2 - 15x = 18x^2 - 38x + 10 \end{aligned}$$

3) $f(x) = \frac{6x-5}{x^2+1}$; $D_f = \mathbb{R}$ car $(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 + 1 \neq 0$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car (c'est une quotient de deux fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 + 1 \neq 0$)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{u(x)}{v(x)} \text{ avec } u(x) = 6x - 5 \rightarrow u'(x) = 6 \\ v(x) &= x^2 + 1 \rightarrow v'(x) = 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{6(2x) - (6x-5)(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{12x^2 - 6x^3 - 6x + 5x^2 + 5}{(x^2+1)^2} = \frac{-6x^3 + 17x^2 + 5}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

4) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 1}$; $D_f = \mathbb{R}$ car $(\forall x \in \mathbb{R}) : 3x^2 + 2x + 1 > 0$
 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \rightarrow 3x^2 + 2x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R}) : 3x^2 + 2x + 1 > 0$

On pose : $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 3x^2 + 2x + 1 \rightarrow u'(x) = 6x + 2$

$$\text{Donc : } f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{6x + 2}{2\sqrt{3x^2 + 2x + 1}} = \frac{3x + 1}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1}}$$

5) $g(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4$; $D_g = \mathbb{R}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une polynôme

On pose : $g(x) = (u(x))^4$

Avec $u(x) = 2x^2 + 3x - 3 \rightarrow u'(x) = 4x + 3$

Donc : $g'(x) = 4u'(x)(u(x))^3 = 4(4x + 3)(2x^2 + 3x - 3)^3$

Exercic 08

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x + 1$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2) Calculer $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis étudier les variations de f

3) Déterminer l'équation de (T) la tangente à (Cf) en 0

Solution

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$

* $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$

2) Calculer $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis étudier les variations de f

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x dans $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

3) Déterminer l'équation de (T) la tangente à (Cf) en 0

La droite (T) d'équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

On a $f'(0) = 3 \times 0^2 + 1 = 1$ et $f(0) = 1$

Donc : $(T) : y = 1(x - 0) + 1$

Donc $(T) : y = x + 1$

Exercic 09

f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$

1) Calculer $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$

2) Etudier les variations de f puis dresser le tableau de variations

Solution

1) Calculer f' sur $\mathbb{R}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x dans $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$$

2) Etudier les variations de f puis dresser le tableau de variations

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \text{ ou } x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+

Donc la fonction f est croissante sur les intervalles $]-\infty; 0]$ et $[1; +\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $[0; 1]$

On dresse le tableau de variations de f

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$	$-\infty$	f(0) = 2	f(1) = 1	$+\infty$

Exercice 10

Soit f une fonction tel que : $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

1) Déterminer D_f et Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0

b) Donner une interprétation géométrique

3) a) Déterminer f' puis étudier les variations de f sur D_f

a) Dresser le tableau de variations de f

b) Déterminer les extremus de f

Solution

1) $x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0$. Donc : $D_f = [0; +\infty[$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{2\sqrt{x}^2}{x\sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) = +\infty \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$$\begin{aligned} 2)a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 2\sqrt{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} + \frac{2\sqrt{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = -\infty \end{aligned}$$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite de 0

b) Interprétation géométrique

Donc la courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale en 0 dirigée vers le bas

3)a) Soit $x \in]0; +\infty[$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ (Somme de deux fonctions)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} \\ &= \frac{x - 1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} \end{aligned}$$

Etudier les variations de f

Soit $x \in]0; +\infty[$,

$$\text{On a } f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$$

Donc $\sqrt{x}(1 + \sqrt{x}) > 0$ donc le signe de f' sur $]0; +\infty[$ est le signe de $x - 1$ qui s'annule en 1

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	

Donc la fonction f est croissante sur $]1; +\infty[$

et décroissante sur $]0; 1[$

b) On dresse le tableau de variations de f

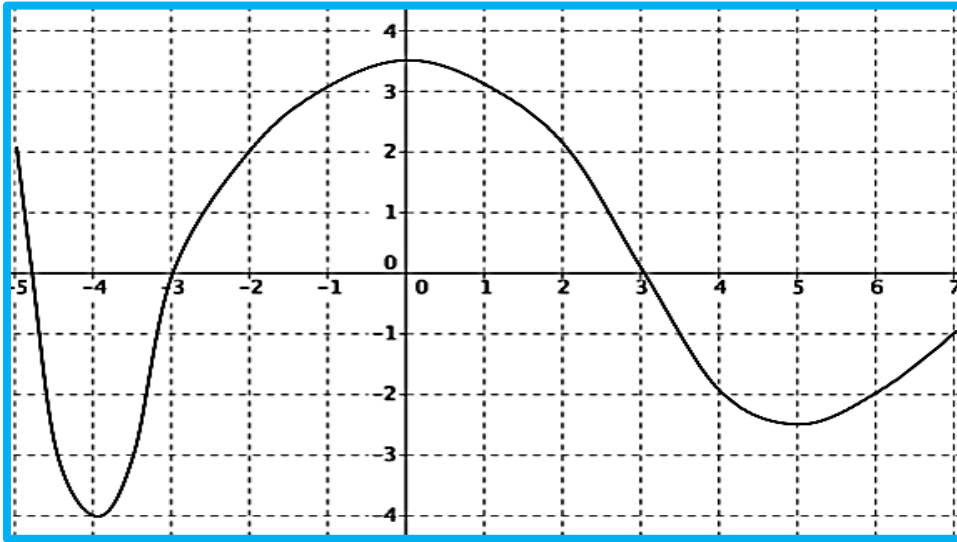
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$f(0) = 0$	$f(1) = -1$	$+\infty$

Remarque

On a f' s'annule et change le signe en 1 donc f admet une valeur minimale -1 qui est atteint en 1

Exercice 11

Soit f une fonction définie par son graphe :



Déterminer graphiquement :

- 1) L'ensemble de définition de la fonction f
- 2) L'image de -5 ; -4 ; -3 ; 3 ; 4 et 7 par f .
- 3) Les antécédents de 2 par la fonction f .
- 4) Donner les variations de la fonction.
- 5) Donner les extremums de f en précisant où ils sont atteints.
- 6) Résumer les résultats précédents dans un tableau de variations
- 7) Déterminer le nombre des solutions de l'équation $f(x) = 0$

Solution

- 1) L'ensemble de définition de la fonction f est l'intervalle $[-5; 7]$
- 2) L'image de -5 ; -4 ; -3 ; 3 et 4 et par la fonction f .
 $f(-5) = 2$; $f(-4) = -4$ et $f(-3) = 0$; $f(4) = -2$
- 3) Les antécédents de 2 par la fonction f sont -2 ; 2 ;
- 4) La fonction f est croissante sur les intervalles $[-4; 0]$ et $[5; 7]$. Elle est décroissante sur les intervalles $[-5; -4]$ et $[0; 5]$.

5) Le maximum de f est $3,5$.

Il est atteint en $x = 0$.

Le minimum de f est -4 .

Il est atteint en $x = -4$.

6) Résumer les résultats précédents dans un tableau de variations

x	-5	-4	0	5	7
$f(x)$	2	-4	3,5	-2,5	-1

7) Déterminer le nombre des solutions de l'équation $f(x) = 0$
 La courbe (Cf) de f coupe l'axe des abscisses en trois points donc le nombre des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est trois solutions

Exercice 12

Soit f une fonction dont le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-2	1	$-\infty$	-1

Déterminer D_f l'ensemble de définition de f ; $f(-3)$; $f(0)$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

Solution

$D_f =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

$f(-3) = -2$; $f(0) = 1$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$

Exercice 13

f et g deux fonctions
définies sur $]0; +\infty[$ par
leurs graphes ci-contre

4) Dresser la table de
variations de f et g

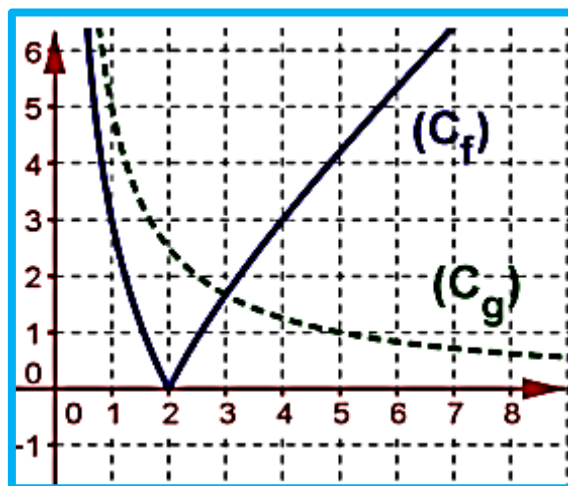
5) Résoudre les équations

$$f(x) = 0 ; f(x) = 3$$

$$\text{Et } g(x) = f(x)$$

6) Résoudre les

$$\text{Inéquations : } f(x) < 3 ; \\ f(x) < g(x) \text{ et } f(x) \geq g(x)$$



Solution

1) Dresser la table de variations de f

On voit que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$ et
décroissante sur $]0; 2]$

D'où le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$

x	0	2	$+\infty$
$f(x)$			
		↘ 0	↗

Dresser la table de variations de g

On voit que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$

Car si $x < y$ alors $g(x) > g(y)$

x	0	$+\infty$
$g(x)$		
		↘

3) Résoudre graphiquement l'équation

$$f(x) = 0 ; f(x) = 3 ; \text{ et } g(x) = f(x)$$

Rappel 4 :

- Graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) avec la droite d'équation $y = k$
- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersections des courbes (C_f) et (C_g)

Résolution d'équation $f(x) = 0$;

On a la courbe (C_f) coupe la droite d'équation $y = 0$ en un point unique d'abscisse 2 donc $S = \{2\}$

Résolution d'équation $f(x) = 3$;

On a la courbe (C_f) coupe la droite d'équation $y = 3$ en deux points d'abscisses 1 et 4 donc $S = \{1, 4\}$

Résolution d'équation $g(x) = f(x)$;

On a les courbes (C_f) et (C_g) sont sécantes en un point unique d'abscisse 3 donc $S = \{3\}$

4) Résoudre graphiquement les inéquations

$$f(x) < 3 ; f(x) < g(x) \text{ et } f(x) \geq g(x)$$

Rappel 05 : Positions relatives de deux courbes,

- Si $f(x) \geq g(x)$ sur un intervalle I alors la courbe (C_f) est située en dessus de (C_g)
- Si $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle I alors (C_f) est située en dessous de (C_g) sur I

Résolution d'inéquation $f(x) < 3$;

On a la courbe (C_f) est située en dessous de la droite d'équation $y = 3$ sur l'intervalle $]1; 4[$ donc $S =]1; 4[$

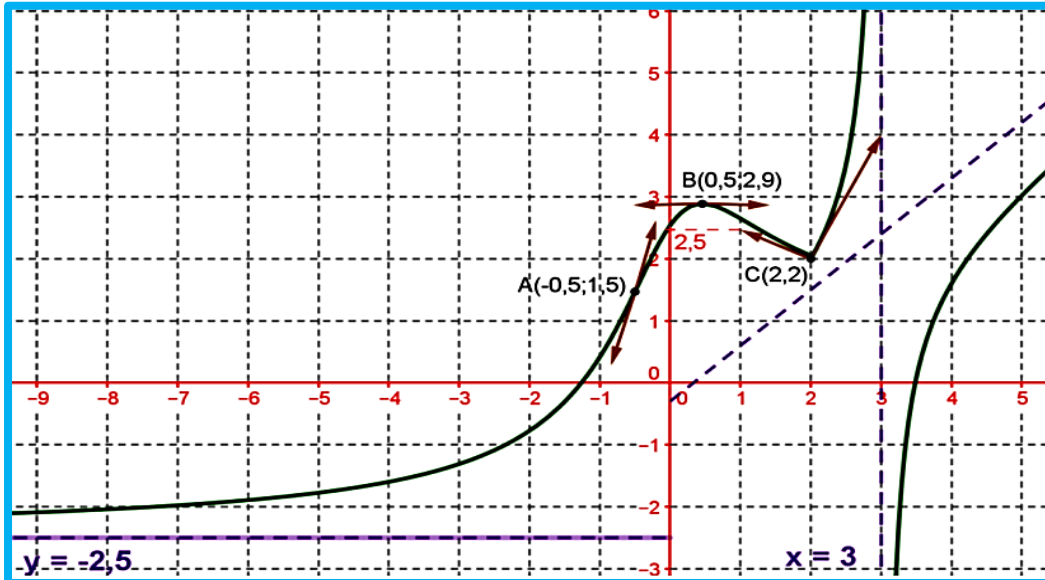
Résolution d'inéquation $f(x) < g(x)$;

On a la courbe (C_f) est située en dessous de la courbe (C_g) sur l'intervalle $]0; 3[$; Donc $S =]0; 3[$

Résolution d'inéquation $f(x) \geq g(x)$;

On a la courbe (C_f) est située en dessus de la courbe (C_g) sur l'intervalle $[3; +\infty[$; Donc $S = [3; +\infty[$

Exercice 14 : Soit f une fonction définie par la courbe suivante



Solution

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2,5 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2f(x) + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2(f(x) + 2,5)}$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2,5 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2,5 = 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2(f(x) + 2,5) = 0$$

Or la courbe est en dessus de la droite d'équations $y = -2,5$ donc $f(x) + 2,5 > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2(f(x) + 2,5) = 0^+$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2f(x) + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2(f(x) + 2,5)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$2) \text{ La tangente en } \frac{1}{2} \text{ est horizontale donc } f' \left(\frac{1}{2} \right) = 0$$

La tangente en $-\frac{1}{2}$ passant par les deux points en $A(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$ et $B(-1; 0)$

Et on a $f'(-\frac{1}{2})$ est le coefficient directeur de la tangente en $-\frac{1}{2}$

$$\text{Donc } f' \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{\frac{3}{2} - 0}{-\frac{1}{2} - (-1)} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'_d(2)$$

1ère méthode :

Rappel : la tangente en $A(a; f'(a))$ est de vecteur directeur $\vec{u}(1; f'(a))$

$f'_d(2) = 2$ Car le vecteur $\vec{u}(1; 2)$ est un vecteur directeur de demi-tangente à droite en 2

2ème méthode : la demi-tangente en 2 passant par les deux points en $A(2; 2)$ et $B(3; 4)$ donc

$$f'_d(2) = \frac{4 - 2}{3 - 2} = \frac{2}{1} = 2$$

$f'_g(2) ???$

1ère méthode :

Rappel : la tangente en $A(a; f'(a))$ est de vecteur directeur $\vec{u}(1; f'(a))$

Le vecteur $\vec{u}(-1; 0,5)$ est un vecteur directeur de demi-tangente à gauche en 2 donc $f'_g(2) = -0,5$

2ème méthode :

La demi-tangente à gauche en 2 passant par les deux points en $A(2; 2)$ et $C(1; 2,5)$ donc

$$f'_g(2) = \frac{2,5 - 2}{1 - 2} = \frac{0,5}{-1} = -0,5$$