

Résumés de cours sur les suites numériques Deuxième bac sciences PC /SVT/SE

Prof fayssal

0681399067

Prof Fayssal

0) Raisonement par récurrence

Soit n_0 un entier fixé et n un entier naturel
Pour montrer la proposition $\forall n \geq n_0 : P(n)$

On suit le principe de **récurrence** suivant :

- Pour $n = n_0$ on vérifie que $P(n)$ est vraie ,
- Soit n un entier fixé tel que $n \geq n_0$

On suppose que $P(n)$ est vraie

Et on montre que $P(n + 1)$ est vraie

- Alors $\forall n \geq n_0 : P(n)$ devient vraie

1) Suite croissante ; décroissante

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de premier terme U_0

- $U_{n+1} - U_n > 0 \Rightarrow (U_n)$ est croissante
- $U_{n+1} - U_n < 0 \Rightarrow (U_n)$ est décroissante
- $U_{n+1} - U_n = 0 \Rightarrow (U_n)$ est constante

Résultat

(U_n) est croissante alors $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n \geq U_0$

(U_n) est décroissante alors $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n \leq U_0$

2) Suite majorée ; minorée ; bornée

- $U_n > a \Rightarrow (U_n)$ est minorée par a
- $U_n < b \Rightarrow (U_n)$ est majorée par b
- $a < U_n < b \Rightarrow (U_n)$ est bornée

3) Suite convergente

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L \in \mathbb{R}$ on dit que la suite (U_n)
est convergente si non elle est divergente

- Toute suite **croissante** et **majorée** est convergente
- Toute suite **décroissante** et **minorée** est convergente

4) Limites des suites usuelles

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n &= +\infty & ; & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} &= +\infty & ; & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty & ; & \quad p \in \mathbb{N}^* \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} &= 0 & ; & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} &= 0 & ; & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 & ; & \quad p \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

5) Limite de la suite géométrique (q^n)

- $-1 < q < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- $q > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- $q < -1 \Rightarrow (q^n)$ n'admet pas de limite

6) Suite géométrique - arithmétique

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de premier terme U_0 et p
un entier tel que $0 \leq p \leq n$

(U_n) géométrique	(U_n) arithmétique
Définition : $U_{n+1} = q U_n$	Définition : $U_{n+1} - U_n = r$
U_n en fonction de n $U_n = U_p \times q^{n-p}$	U_n en fonction de n $U_n = U_p + (n - p)r$
Cas particulier : $U_n = U_0 \times q^n$	Cas particulier : $U_n = U_0 + nr$
Somme des termes $S_n = U_p + \dots + U_n$ $= U_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$	Somme des termes $S_n = U_p + \dots + U_n$ $= \frac{(n - p + 1)(U_p + U_n)}{2}$
Cas particulier : $S_n = U_0 + \dots + U_n$ $= U_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$	Cas particulier : $S_n = U_0 + \dots + U_n$ $= \frac{(n + 1)(U_0 + U_n)}{2}$

7) Limite d'une suite et l'ordre

- $\begin{cases} V_n < U_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$
- $\begin{cases} U_n < V_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$
- $\begin{cases} V_n < U_n < W_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$
- $\begin{cases} |U_n - l| < V_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$

8) La suite (V_n) définie par : $V_n = f(U_n)$

Si la fonction f est **continue** en l et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = f(l)$$

9) La suite (U_n) liée à une fonction f , définie par : $U_{n+1} = f(U_n)$

f une fonction définie sur un intervalle I et
 (U_n) une suite tel que $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} = f(U_n)$
Alors si :

- La fonction f est **continue** sur I et $f(I) \subset I$
 - La suite (U_n) est **convergente** et $U_0 \in I$
- Alors la limite de la suite (U_n) est **une**
solution de l'équation $f(x) = x$ dans I