ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⴰⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⵓⵏⵜ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

Cours

Physique & Chimie

2 BAC

Filière : Science Expérimentale

Option : Science Physique

لا تنسونا من صالح دعائكم

BABA EL HOUSSINE

Les questions qui se posent au physicien

i. Le rôle de la physique

La science physique jeu un rôle très important dans l'évolution de la science et de la technologie.

La physique intervient dans plusieurs domaines :

- **La médecine**
- **l'astronomie**
- **L'industrie**
- **L'énergie**
- …

ii. Les activités du physicien

- Observation et étude et explication des phénomènes physiques.
- Développer la recherche scientifique dans différents domaines.
- Trouver des sources d'énergie, et contribuer à résoudre les problèmes environnementaux.

iii. Les questions qui se posent au physicien

- Quelles sont les grandeurs qui permettent d'étudier l'évolution du système étudié ?
- Quelles sont les paramètres extérieurs qui commandent cette évolution ?
- L'évolution étudiée peut-elle être caractériser par un ou plusieurs temps caractéristique ?
- Quelle est le rôle des conditions initiales dans l'évolution du système étudié ?
- L'évolution étudiée est-elle lente, rapide, totale ou limitée, est-elle uniforme ou variée ?

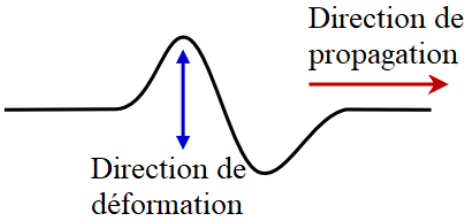
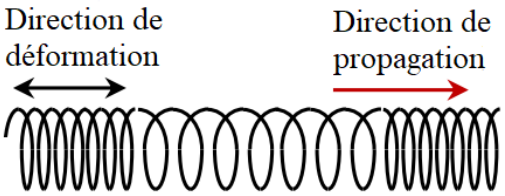
Les ondes mécaniques progressives

i. Les ondes mécaniques

1) Définition

Onde mécanique : est le phénomène de propagation d'une perturbation dans un milieu matériel élastique sans transport de la matière.

2) Type d'ondes mécaniques progressives

Onde transversale	Onde longitudinale
La déformation du milieu matériel est perpendiculaire à la direction de propagation. 	La déformation du milieu matériel est parallèle à la direction de propagation. 

3) Dimension d'onde

Onde monodimensionnelle	Onde bidimensionnelle	Onde tridimensionnelle
La propagation a lieu dans une seule direction	La propagation a lieu dans un plan (deux dimensions)	La propagation a lieu dans l'espace (trois dimensions)

4) L'onde sonore

L'onde sonore est une onde mécanique longitudinales tridimensionnelle sa propagation nécessite la présence d'un milieu matériel.

5) Superposition de deux ondes

Deux ondes mécaniques peuvent se superposer sans se perturber.

ii. La célérité de propagation d'une onde

1) Définition

La célérité (vitesse de propagation) v d'une onde progressive dans un milieu monodimensionnelle est donnée par : $v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{MM'}{\Delta t}$ avec $\begin{cases} v : \text{la vitesse de l'onde en (m/s)} \\ d : \text{la distance parcourue par l'onde en(m)} \\ \Delta t : \text{la durée de parcoure (s)} \end{cases}$

2) Facteurs influençant sur la vitesse de propagation

- **Influence de l'élasticité du milieu**

La célérité d'une onde augmente avec l'élasticité du milieu de propagation.

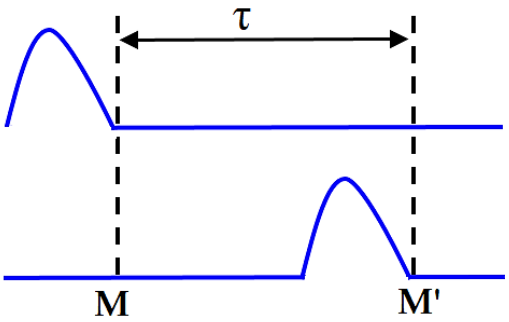
- **Influence de l'inertie du milieu**

Plus l'inertie du milieu est grande plus la célérité est faible.

3) Le retard temporel

Le point **M'** reproduit le mouvement du point **M** mais avec un décalage dans le temps ou retard **τ** exprimé par la relation :

$\tau = \frac{MM'}{v}$ avec $\begin{cases} \tau : \text{le retard temporel en (s)} \\ MM' : \text{la distance entre M et M' en(m)} \\ v : \text{la vitesse de l'onde en (m/s)} \end{cases}$



La relation entre Y_M l'élongation du point **M** et $Y_{M'}$ l'élongation du point **M'** est : $Y_{M'}(t) = Y_M(t - \tau)$

Les ondes mécaniques progressives périodiques

i. Onde mécanique progressive périodique

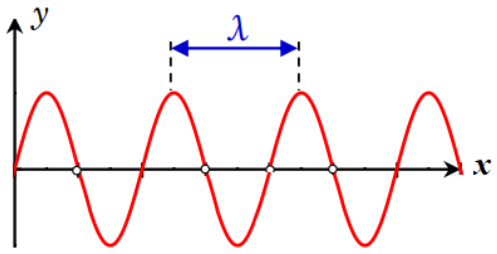
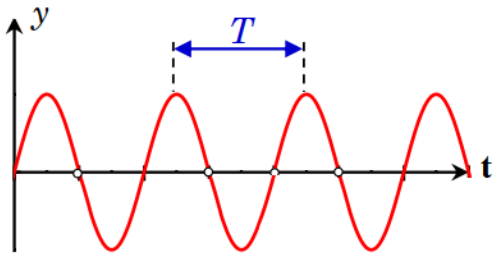
1) Onde mécanique progressive périodique

Une onde mécanique est dite périodique si la perturbation se répète identique à lui-même à des intervalles de temps identiques.

2) Onde mécanique progressive sinusoïdale

Une onde progressive périodique est dite sinusoïdale si la perturbation crée par la source entraîne une variation sinusoïdale en fonction du temps.

ii. Caractéristiques d'une onde progressive périodique

Périodicité spatiale (longueur d'onde **λ**)	Périodicité temporel (la période **T**)
la longueur d'onde est la distance séparant deux points consécutifs du milieu de la propagation présentant le même état vibratoire 	Le période est la durée qui sépare deux points consécutifs du milieu de propagation présentant le même état vibratoire 

Remarque : La fréquence est le nombre de périodes par unité de temps : $\mathbf{N = \frac{1}{T}}$

1) Vitesse de propagation d'une onde périodique

$$\mathbf{V = \frac{\lambda}{T} = N.\lambda} \quad \text{Avec} \quad \begin{cases} V : \text{ la vitesse de l'onde en (m/s)} \\ \lambda : \text{la longueur d'onde en(m)} \\ T: \text{la période en (s)} \\ N: \text{la fréquence en (Hz)} \end{cases}$$

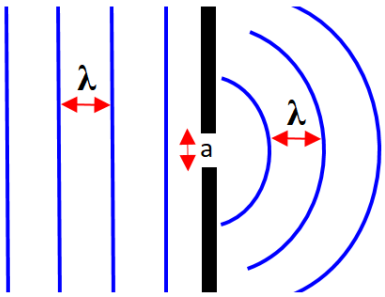
2) Mouvements de deux points du milieu de propagation

- Deux points $\mathbf{M_1}$ et $\mathbf{M_2}$ d'un milieu vibrent en phase si : $\mathbf{M_1M_2 = k.\lambda}$
- Deux points $\mathbf{M_1}$ et $\mathbf{M_2}$ d'un milieu vibrent en opposition de phase si : $\mathbf{M_1M_2 = (2k+1).\frac{\lambda}{2}}$

iii. Phénomène de diffraction

Lorsqu'une onde mécanique franchit un obstacle ou traverse une ouverture, il peut se produire le phénomène de diffraction.

- Pour avoir ce phénomène, il faut que : $\mathbf{a \leq \lambda}$
- Les deux ondes incidente et diffractée ont la même fréquence **N**, la même vitesse **V** et la même longueur d'onde **λ**.



iv. Milieu dispersif

Un milieu est appelé **milieu dispersif** si la vitesse de propagation (célérité) de l'onde dans le milieu dépend de la fréquence de la source.

v. Le stroboscope

Un stroboscope est un flash électronique capable d'émettre des éclairs à une fréquence réglable **Ns**.
Le stroboscope permet d'étudier les phénomènes périodiques rapides.

Remarque

On obtient une immobilité apparente de l'onde lorsque la fréquence de l'onde étudie **N** et la fréquence du stroboscope **Ns** vérifie la relation : $N_s = k.N$ Avec : $k \in IN^*$

Propagation d'une onde lumineuse

i. Onde lumineuse

1) Définitions

- **L'onde lumineuse** est la propagation d'une perturbation électromagnétique dans les milieux transparents
- **La lumière** est une onde électromagnétique dont la célérité dans le vide est : **c=3.10^8 m/s**
- **Lumière monochromatique** : lumière constituée d'une seule radiation (une seule longueur d'onde)
- **Lumière polychromatique** : lumière constituée d'un ensemble de lumières monochromatiques

2) Vitesse de propagation d'une onde lumineuse

La célérité dans le vide	La célérité dans un milieu matériel
$C = \frac{\lambda_0}{T} = \nu.\lambda_0$ λ_0 : Longueur d'onde dans le vide	$V = \frac{\lambda}{T} = \nu.\lambda$ λ : Longueur d'onde dans un milieu matériel

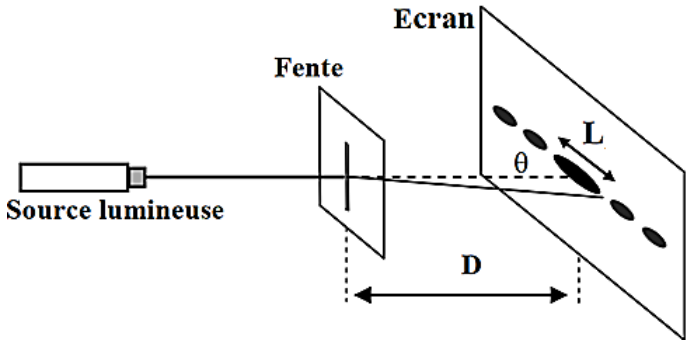
Remarque

- La fréquence de l'onde lumineuse ν ne dépend pas du milieu de propagation.
- Domaine des ondes lumineuses visibles : $\lambda \in [400nm; 800nm]$

ii. Diffraction d'une onde lumineuse monochromatique

1) Aspect ondulatoire de la lumière

La lumière monochromatique subit le phénomène de diffraction par une fente ($a \leq \lambda$) ce qui montre que la lumière a un aspect ondulatoire.



2) Ecart angulaire θ

L'écart angulaire du faisceau diffracté est l'angle entre le milieu de la tache centrale et la première extinction.

$$\theta = \frac{\lambda}{a} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \theta : \text{L'écart angulaire en (rad)} \\ \lambda : \text{La longueur d'onde en (m)} \\ a : \text{La largeur de la fente en (m)} \end{cases}$$

- Pour un angle θ très petit on a : $(\tan\theta \approx \theta)$ avec $\tan\theta = \frac{L}{2.D}$ et $\theta = \frac{\lambda}{a}$ d'où $L = \frac{2.\lambda.D}{a}$

iii. Dispersion de la lumière

1) Indice de réfraction

L'indice de réfraction **n** d'un milieu transparent pour une lumière monochromatique est donné par :

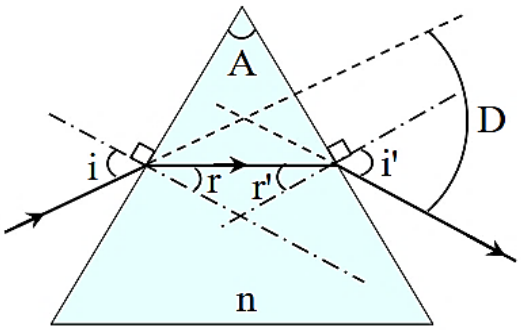
$$n = \frac{C}{V} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} V : \text{La vitesse de la lumiére dans un milieu d'indice } n \\ C : \text{La célérité de la lumiére dans le vide} \end{cases}$$

2) Dispersion de la lumière blanche par un prisme

- La dispersion de la lumière est la décomposition de la lumière polychromatique en radiations de différentes couleurs.
- Lorsque la lumière blanche traverse le prisme, la lumière se décompose en plusieurs couleurs et chaque couleur subit une déviation **D**.

3) Les formules de prisme

- Loi de la réfraction (1^{ére} face) : $\sin i = n \sin r$
- Loi de la réfraction (2ème face) : $n \sin r' = \sin i'$
- L'angle du prisme : $A = r + r'$
- La déviation : $D = i + i' - A$



La décroissance radioactive

i. Stabilité et instabilité des noyaux

1) Composition du noyau

Le noyau d'un atome associé à un élément chimique **X** est représenté par le symbole suivant :

$$^{A}_{Z}X \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A : \text{Nombre de nucléons} \\ Z : \text{Numéro atomique} \\ N = A - Z : \text{Le nombre de neutrons d'un noyau} \end{cases}$$

2) Isotopes

Deux noyaux isotopes ont le même nombre de protons mais des nombres de neutrons différents (**Z** identique mais **A** différents).

ii. La radioactivité

1) Définition

La radioactivité est une transformation naturelle, spontanée et imprévisible d'un noyau $^{A}_{Z}X$ instable en un noyau $^{A'}_{Z'}Y$ plus stable avec l'émission d'une ou de plusieurs particules (**α** , **β** et souvent un rayonnement **γ**)

2) Lois de conservation (lois de Soddy)

La réaction nucléaire obéit à des lois de conservation (lois de Soddy) :

- Conservation du nombre de charge **Z**
- Conservation du nombre des nucléons **A**

3) La radioactivité α, β⁻ et β⁺

La radioactivité α

Transformation nucléaire d'un noyau $^{A}_{Z}X$ instable en un noyau $^{A'}_{Z'}Y$ plus stable avec l'émission d'un noyau d'Hélium $^{4}_{2}He$

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He$$

La radioactivité β⁻

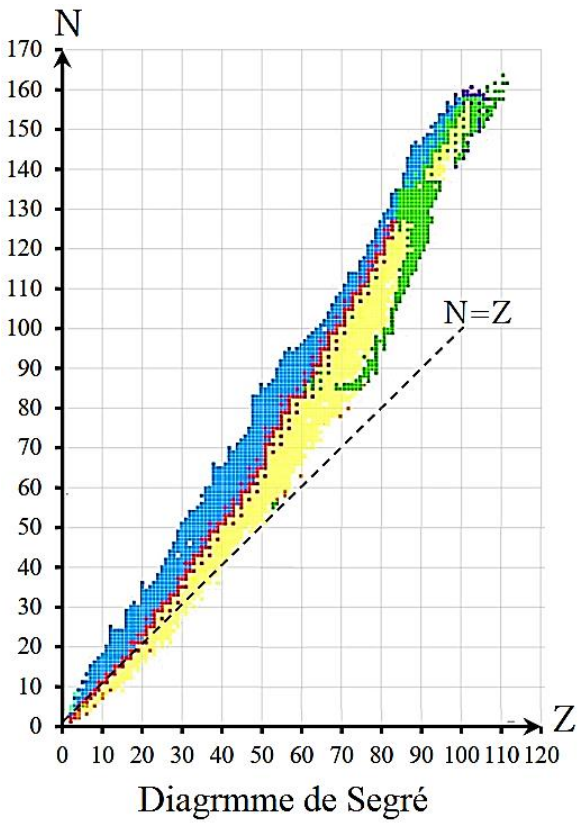
Transformation nucléaire d'un noyau $^{A}_{Z}X$ instable en un noyau $^{A'}_{Z'}Y$ plus stable avec l'émission d'un électron $^{0}_{-1}e$

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}e$$

La radioactivité β⁺

Transformation nucléaire d'un noyau $^{A}_{Z}X$ instable en un noyau $^{A'}_{Z'}Y$ plus stable avec l'émission d'un positron $^{0}_{+1}e$

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + {}^{0}_{+1}e$$



4) Emission gamma γ

Le noyau issu d'une désintégration **α** ou **β** est souvent dans un état excité, il se désexcite en libérant un rayonnement électromagnétique **γ** :

$$^{A}_{Z}X^{*} \rightarrow {}^{A}_{Z}X + \gamma$$

5) Famille radioactive

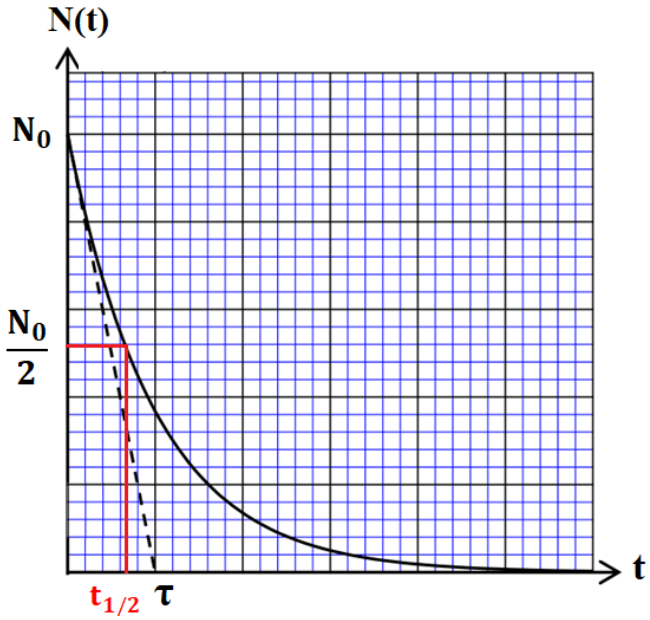
La famille radioactive est une suite de nucléides descendant d'un même noyau (noyau père), par une suite de désintégrations successives jusqu' à l'obtention d'un noyau stable.

iii. La décroissance radioactive

1) Loi de décroissance radioactive

Le nombre de noyaux **N(t)** d'un échantillon radioactif suit la loi de décroissance radioactive :

$$\mathbf{N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}} \quad \begin{cases} N(t) : \text{nombre de noyaux à l'instant t} \\ N_0 : \text{nombre de noyaux à } t = 0\ s \\ \lambda : \text{constante radioactive} \end{cases}$$



Remarque

On montre : $\mathbf{m = m_0\, e^{-\lambda t}}$ et $\mathbf{n = n_0\, e^{-\lambda t}}$

2) Constante du temps et demi vie

- Demi-vie $\mathbf{t_{1/2}}$ d'un échantillon radioactif est la durée au bout de laquelle le nombre des noyaux radioactifs se divise en deux.

- La constante de temps $\boldsymbol{\tau}$ est donnée par la relation : $\boldsymbol{\tau = \frac{1}{\lambda}}$

Remarque

La relation entre la demi-vie et la constante radioactive : $\mathbf{t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau . \ln 2}$

3) Activité d'une source radioactive

- L'activité **a** mesure le nombre moyen de désintégrations par unité de temps elle s'exprimée en becquerels (Bq) : $\mathbf{a(t) = -\frac{dN}{dt} = \lambda . N(t)}$
- **1Bq** correspond à une désintégration par seconde
- La loi de la décroissance radioactive en fonction de l'activité **a** :

$$\mathbf{a(t) = a_0\, e^{-\lambda t}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a(t) : \text{l'activité à l'instant t} \\ a_0 : \text{l'activité à } t = 0\ s \\ \lambda : \text{constante radioactive} \end{cases}$$

v. La datation par le carbone 14

Dès qu'un être vivant mort, le carbone **14** n'est plus renouvelé il se met à décroître.

Pour déterminer l'âge du matériau mort, on mesure l'activité $\mathbf{a(t)}$ du carbone **14** d'un échantillon de matériau mort et on mesure l'activité $\mathbf{a_0}$ d'un même matériau vivant et on applique la formule :

$$\mathbf{a(t) = a_0\, e^{-\lambda t}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{t = \frac{1}{\lambda} . \ln \frac{a_0}{a(t)}}$$

Formules mathématiques	
$\frac{d(e^u)}{dx} = u' e^u$	$\frac{d(\ln u)}{dx} = \frac{u'}{u}$
$e^0 = 1$	$\ln 1 = 0$
$e^{a+b} = e^a . e^b$	$\ln(a . b) = \ln a + \ln b$
$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$	$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
$(e^a)^b = e^{a*b}$	$\ln(a^b) = b \ln a$
$e^{\ln a} = a$	$\ln(e^a) = a$

Noyaux, masse et énergie

i. Équivalence masse - énergie

1) Relation d'Einstein

Toute particule de masse **m** possède au repos une énergie **E** donnée par la relation d'Einstein : $\mathbf{E = m.c^2}$

c : La célérité de la lumière dans le vide $\mathbf{c = 3.10^8 m/s}$

2) Unités de masse et d'énergie

Unité de masse atomique : **u**	Unité d'énergie : **eV**
$\mathbf{1u \approx 1{,}6\times 10^{-27} kg}$	$\mathbf{1MeV = 10^6 eV = 1{,}6.10^{-13}\ J}$

Remarque : on utilise souvent : $\mathbf{1u = 931.5\ Mev.c^{-2}}$

ii. Energie de liaison du noyau

1) Défaut de masse du noyau Δm

Le défaut de masse **Δm** d'un noyau $^A_Z\mathbf{X}$ est la différence entre la somme des masses de ses nucléons pris séparément et la masse du noyau : $\mathbf{\Delta m = Z.m_p + (A-Z)m_n - m(^A_Z X)}$

2) Énergie de liaison d'un noyau E_l

L'énergie de liaison $\boldsymbol{E_l}$ d'un noyau est l'énergie que le milieu extérieur doit fournir à un noyau $^A_Z\mathbf{X}$ pour le dissocier en nucléons séparés : $\mathbf{E_l = \Delta m.c^2 = [Z.m_p + (A-Z)m_n - m(^A_Z X)].c^2}$

3) Energie de liaison par nucléon ξ

L'énergie de liaison par nucléon $\boldsymbol{\xi}$ est donnée par : $\boldsymbol{\xi = \frac{E_l}{A}}$ avec $\begin{cases} E_l : \text{énergie de liaison} \\ A : \text{nombre de nucléons} \end{cases}$

Un noyau est d'autant **plus stable** que son énergie de liaison par nucléon est **grande**.

iii. Réaction nucléaire

1) La fusion nucléaire

La fusion est une réaction nucléaire au cours de laquelle deux noyaux légers s'unissent pour former un noyau lourd. (Exemple : $^3_1\mathbf{H} + {}^2_1\mathbf{H} \rightarrow {}^4_2\mathbf{He} + {}^1_0\mathbf{n}$)

2) La fission nucléaire

La fission est une réaction nucléaire au cours de laquelle un neutron lent (neutron thermique) brise un noyau lourd pour former deux noyaux plus légers. (Exemple $^1_0\mathbf{n} + {}^{235}_{92}\mathbf{U} \rightarrow {}^{94}_{38}\mathbf{Sr} + {}^{104}_{54}\mathbf{Xe} + 2.{}^1_0\mathbf{n}$)

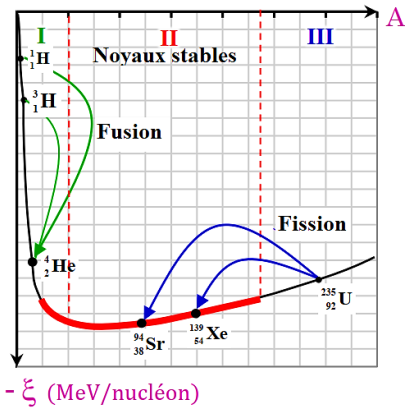
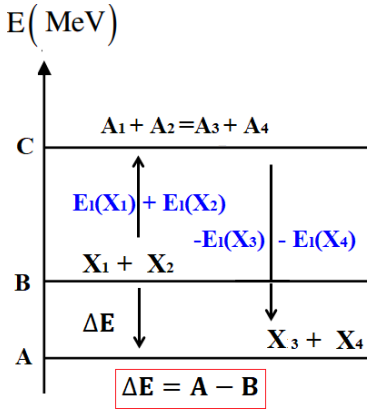
Remarque : la fusion et la fission sont des réactions nucléaires **provoquées**

3) Energie d'une réaction nucléaire

L'énergie d'une transformation nucléaire est donnée par :

$$\mathbf{\Delta E = [\sum m_{produits} - \sum m_{réactifs}].c^2} \quad \text{ou} \quad \mathbf{\Delta E = \sum E_l(réactifs) - \sum E_l(produits)}$$

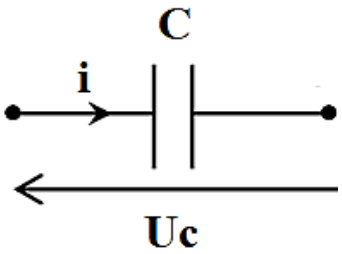
Remarque : L'énergie libérée par une réaction nucléaire est donnée par : $\mathbf{E_{lib} = |\Delta E|}$

Courbe d'Aston	Diagramme d'énergie
	

Dipôle RC

i. Le condensateur

1) Définition



Le condensateur est un dipôle constitué de deux armatures conductrices séparées par un isolant, chaque condensateur est caractérisé par sa capacité **C** en Farad (**F**)

2) Relation charge – tension

La charge **q** d'un condensateur, est liée à la tension U_C par la relation :

$$q = C.U_C \quad \text{Avec} \quad \begin{cases} U_C : \text{tension aux bornes du condensateur en(V)} \\ q : \text{la charge du condensateur en(C)} \end{cases}$$

3) Charge électrique et intensité du courant

L'intensité du courant **i(t)** traversant un condensateur est la variation de la charge **q** au cours du temps **t**.

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C.\frac{dU_C}{dt}$$

Remarque : dans le cas d'un courant constant la relation devient : $I_0 = \frac{C.U_C}{t}$

4) Association des condensateurs

Association en série	Association en dérivation
$\frac{1}{C_{éq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots$	$C_{éq} = \sum_{i=1}^{N} C_i = C_1 + C_2 + \cdots$

5) Energie électrique stockée dans un condensateur

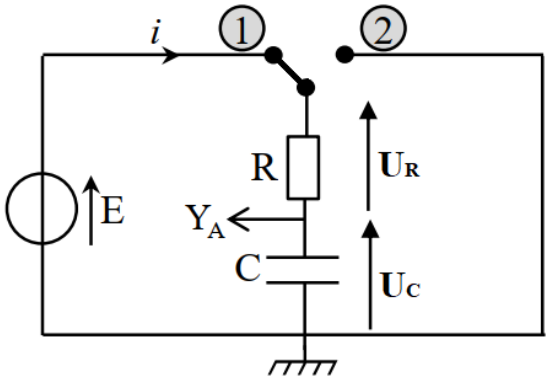
L'énergie E_e stockée dans un condensateur est donnée par : $E_e = \frac{1}{2}.C.U_C{}^2 = \frac{1}{2}.\frac{q^2}{C}$

ii. Charge et décharge d'un condensateur

1) Charge du condensateur

a) Etude expérimental

On réalise le montage expérimental ci-contre, à l'instant **t=0 s** on place l'interrupteur dans la position **(1)** et on visualise la variation de la tension $U_C(t)$ aux bornes du condensateur en fonction de temps, on obtient la courbe de la figure ci-dessous



b) Etude théorique

- **L'équation différentielle vérifie par $U_C(t)$**

En appliquant la loi d'additivité des tensions :

$$U_C + U_R = E \quad \Leftrightarrow \quad U_C + R.i = E$$

$$U_C + R.C\frac{dU_C}{dt} = E \quad (1)$$

- **Détermination de $U_C(t)$**

La solution de l'équation différentielle est sous la forme

$$U_C(t) = A\,e^{-\frac{t}{\tau}} + B$$

En remplaçant $U_C(t)$ dans (1) et en utilisant la condition initiale ($U_C(0) = 0$) : $A = -E$ et $B = E$ et $\tau = RC$

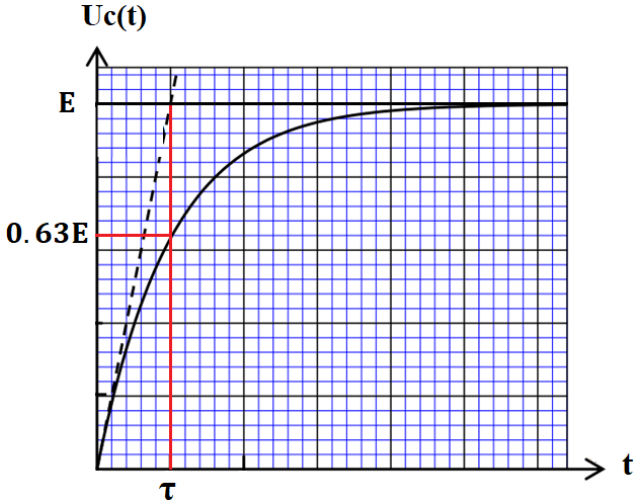
$$U_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

- **Détermination de q(t)**

$$q(t) = C.U_C(t) = C.E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

- **Détermination de i(t)**

$$i(t) = C.\frac{dU_C}{dt} = \frac{E}{R}\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

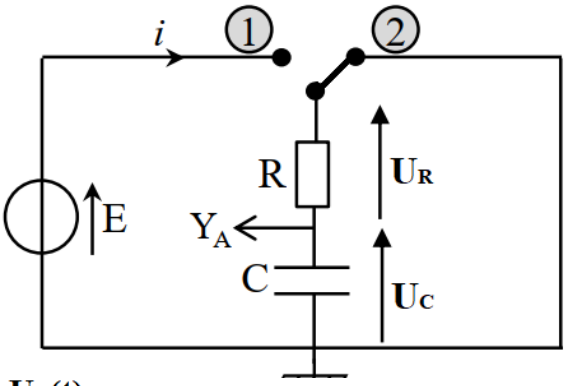


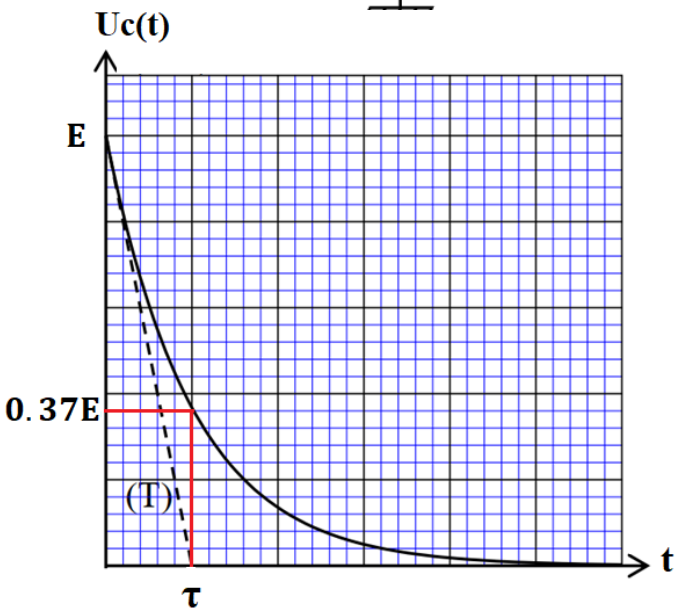
2) Décharge du condensateur

a) Etude expérimentale

Apres avoir chargée le condensateur on bascule l'interrupteur vers la position (2) (montage ci-contre)

On visualise la variation de la tension $\mathbf{U_C(t)}$ aux bornes du condensateur en fonction de temps, on obtient la courbe de la figure ci-dessous





b) Etude théorique

- **L'équation différentielle vérifie par $U_C(t)$**

En appliquant la loi d'additivité des tensions :

$$U_C + U_R = 0$$
$$U_C + R.i = 0$$

$$\mathbf{U_C + R.C\frac{dU_C}{dt} = 0} \quad (2)$$

- **Détermination de $U_C(t)$**

La solution de l'équation différentielle est sous la forme

$$U_C(t) = A\,e^{-\frac{t}{\tau}} + B$$

En remplaçant $U_C(t)$ dans (2) et en utilisant la condition initiale ($U_C(0) = E$) : $A = E$ et $B = 0$ et $\tau = RC$

$$\mathbf{U_C(t) = E\,e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

- **Détermination de $q(t)$**

$$\mathbf{q(t) = C.U_C(t) = C.Ee^{-\frac{t}{\tau}}}$$

- **Détermination de i(t)**

$$\mathbf{i(t) = C.\frac{dU_C}{dt} = -\frac{E}{R}\,e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

- τ = **RC** : la constante du temps du dipôle **RC**

3) La constante du temps

a) Détermination de la constante de temps

Cas de la charge	Cas de la décharge
$\mathbf{U_C(\tau) = 0.63\,E}$	$\mathbf{U_C(\tau) = 0.37\,E}$

Remarque

- La durée de la charge et de la décharge est $\Delta t \approx 5\tau$
- La durée de la charge et de la décharge augmente lorsque la capacité **C** et/ou la résistance **R** augmente

b) Analyse dimensionnel du constant de temps τ

On a $\tau = RC$ $\Leftrightarrow$ $[\tau] = [R].[C]$

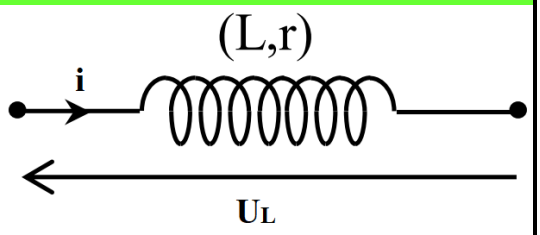
On a $U = R.I$ $\Leftrightarrow$ $[R] = \frac{[U]}{[I]}$

On a $i(t) = C.\frac{dU_C}{dt}$ $\Leftrightarrow$ $[C] = \frac{[I].[t]}{[U]}$

$[\tau] = [R].[C] = \frac{[U]}{[I]}.\frac{[I].[t]}{[U]}$ $\Leftrightarrow$ $[\tau] = [t]$

Dipôle RL

i. La bobine



1) Définition

La bobine est un dipôle passif, formée d'un enroulement cylindrique d'un fil électrique recouvert par un isolant, la bobine est caractérisée par son inductance **L,** exprimé en Henry **(H)**

2) La tension aux bornes de la bobine

La tension $\mathbf{U_L}$ aux bornes de la bobine est donnée par :

$$\mathbf{U_L = r.i + L\frac{di}{dt}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \text{L : L'inductance de la bobine en (H)} \\ \text{r : La résistance interne de la bobine en } (\Omega) \\ \text{i : L'intensité du courant en (A)} \end{cases}$$

Remarque

Courant continu I = cte	Résistance interne négligeable (r = 0)
$\mathbf{U_L = r.i}$	$\mathbf{U_L = L\frac{di}{dt}}$

3) Influence de la bobine dans un circuit

Une bobine permet de retarder l'établissement ou la rupture (annulation) du courant qui la traverse.

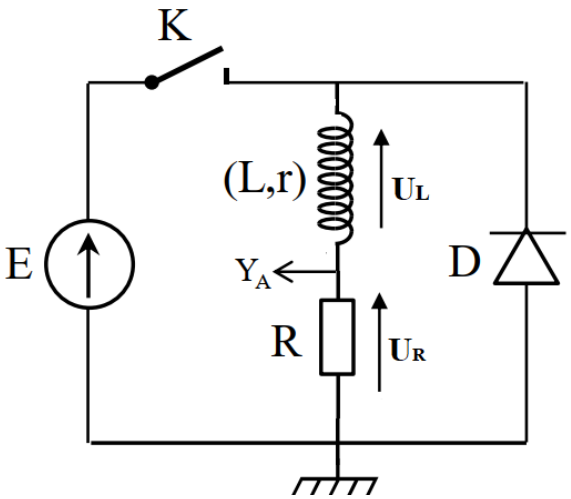
4) Energie emmagasiné dans une bobine

L'énergie magnétique stockée dans une bobine est donnée par : $\mathbf{E_m = \frac{1}{2}.L.i^2}$

ii. Etablissement et rupture du courant

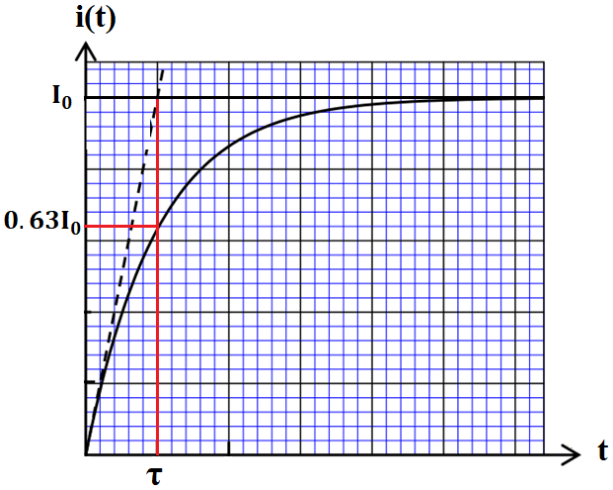
1) Etablissement du courant

a) Etude expérimental



On réalise le montage expérimental ci-contre à l'instant **t=0s** on ferme l'interrupteur K et on visualise la variation de l'intensité du courant $\mathbf{i(t)}$ en fonction de temps

On obtient la courbe de la figure ci-dessous



b) Etude théorique

- **L'équation différentielle vérifie par $\mathbf{i(t)}$**

En appliquant la loi d'additivité des tensions :

$$U_L + U_R = E$$

$$r.i + L\frac{di}{dt} + R.i = E$$

$$(R + r)i + L\frac{di}{dt} = E$$

$$\mathbf{i + \frac{L}{R+r}.\frac{di}{dt} = \frac{E}{R+r}}$$

- **Détermination de $\mathbf{i(t)}$**

La solution de l'équation différentielle est sous la forme :

$$i(t) = A\,e^{-\frac{t}{\tau}} + B$$

En remplaçant $\mathbf{i(t)}$ dans l'équation différentielle et en utilisant les conditions initiales : $B = -A = \frac{E}{R+r}$ et $\tau = \frac{L}{R+r}$

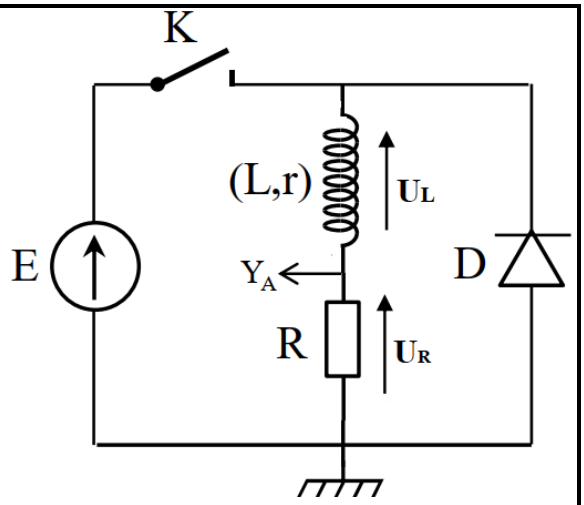
D'où $\mathbf{i(t) = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

- $\mathbf{I_0 = \frac{E}{R+r}}$: La valeur maximale de l'intensité du courant
- $\boldsymbol{\tau = \frac{L}{R+r}}$: La constante du temps du dipôle RL

2) Rupture du courant

Etude expérimentale

Apres avoir établit le courant dans la bobine on ouvre l'interrupteur K (montage ci-contre) et on visualise la variation de l'intensité du courant $\mathbf{i(t)}$ en fonction de temps (la figure ci-dessous)



Remarque

Le rôle de la diode dans le circuit est de protéger la bobine contre la surtension qui peut apparaître à ces bornes lors de l'ouverture de l'interrupteur.

Etude théorique

- **L'équation différentielle vérifie par $\mathbf{i(t)}$**

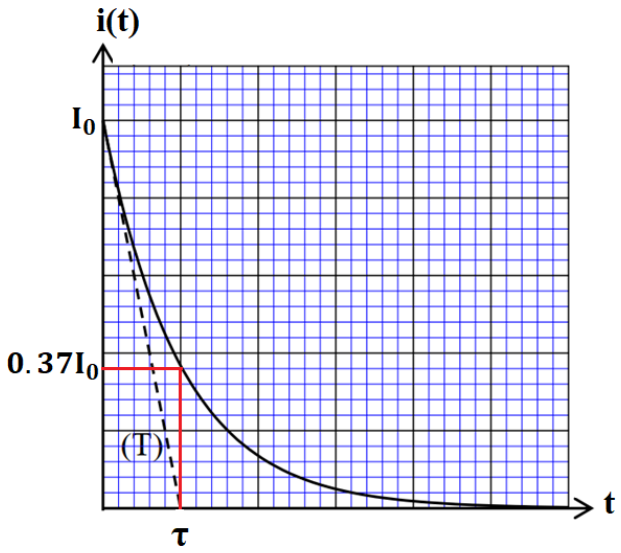
En appliquant la loi d'additivité des tensions :

$$U_L + U_R = 0$$

$$r.i + L\frac{di}{dt} + R.i = 0$$

$$(R + r)i + L\frac{di}{dt} = 0$$

$$\mathbf{i + \frac{L}{R+r}.\frac{di}{dt} = 0}$$



- **Détermination de $\mathbf{i(t)}$**

La solution de l'équation différentielle est sous la forme

$$i(t) = A\,e^{-\frac{t}{\tau}} + B$$

En remplaçant $\mathbf{i(t)}$ dans l'équation différentielle et en utilisant les conditions initiales : $A = \frac{E}{R+r} = I_0$ et $B = 0$ et $\tau = \frac{L}{R+r}$

D'où : $\mathbf{i(t) = I_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}}$

- $\mathbf{I_0} = \frac{E}{R+r}$: La valeur maximale de l'intensité du courant
- $\boldsymbol{\tau} = \frac{L}{R+r}$: La constante du temps du dipôle RL

3) La constante du temps

a) Détermination de la constante du temps

Etablissement du courant	Rupture du courant
$\mathbf{i(\tau) = 0.63\, I_0}$	$\mathbf{i(\tau) = 0.37\, I_0}$

Remarque

- La durée de l'établissement et de la rupture du courant est $\boldsymbol{\Delta t \approx 5\tau}$
- La durée de l'établissement et de la rupture augmente lorsque l'inductance **L** augmente et/ou la résistance $\boldsymbol{R + r}$ diminue

b) Analyse dimensionnel du constant de temps τ

On a $\tau = \frac{L}{R+r} = \frac{L}{R_T}$ $\Leftrightarrow$ $[\tau] = \frac{[L]}{[R]}$

On a $U = R.I$ $\Leftrightarrow$ $[R] = \frac{[U]}{[I]}$

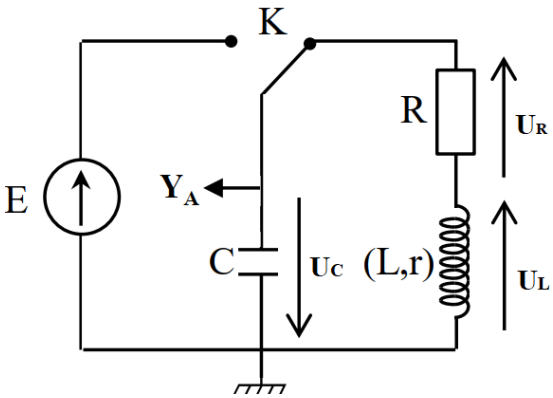
Et $U = L\frac{di}{dt}$ $\Leftrightarrow$ $[L] = \frac{[U].[t]}{[I]}$

$[\tau] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{[I]}{[U]}.\frac{[U].[t]}{[I]} = [t]$ $\Leftrightarrow$ Donc $[\tau] = [t]$

Circuit RLC en série

i. Circuit RLC

1) Equation différentielle vérifie par $U_C(t)$



Circuit RLC : association en série d'un condensateur chargé de capacité **C** et d'une bobine d'inductance **L** et un conducteur ohmique de résistance **R**.

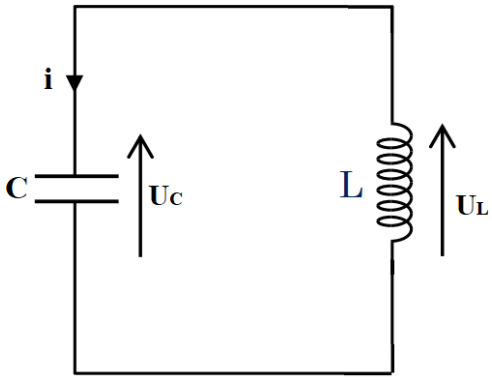
En appliquant la loi d'additivité des tensions :

$$U_C + U_R + U_L = 0 \quad \Leftrightarrow \quad U_C + R.i + r.i + L\frac{di}{dt} = 0$$

$$U_C + (R+r)i + L\frac{di}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad U_C + (R+r)C\frac{dU_C}{dt} + LC\frac{d^2U_C}{dt^2} = 0$$

$$\boldsymbol{\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{R+r}{L}.\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC}U_C = 0}$$

ii. Circuit LC



Circuit LC : association en série d'un condensateur chargé de capacité **C** et d'une bobine idéale($\mathbf{L, r = 0}$)

1) Equation différentielle vérifie par $U_C(t)$

En appliquant la loi d'additivité des tensions :

$$U_C + U_L = 0 \quad \Leftrightarrow \quad U_C + L\frac{di}{dt} = 0$$

$$U_C + L\frac{di}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad U_C + LC\frac{d^2U_C}{dt^2} = 0$$

$$\boldsymbol{\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}U_C = 0}$$

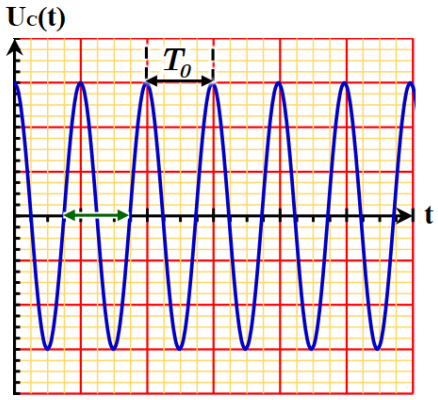
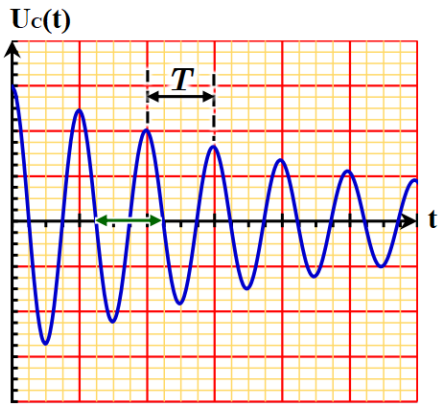
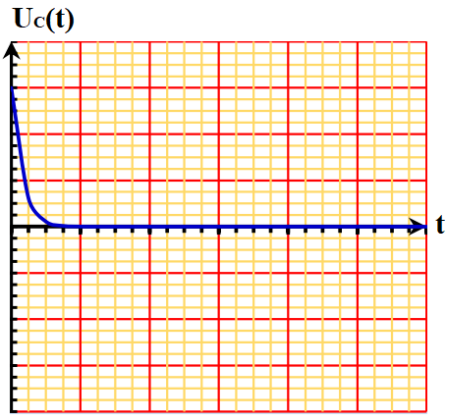
- La solution de l'équation différentielle est sous la forme :

$$\mathbf{U_C(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)} \quad \text{avec} \begin{cases} U_m : \text{la valeur maximale de la tension} \\ T_0 : \text{la période propre} \\ \varphi : \text{la phase à l'origine des temps} \end{cases}$$

- En remplaçant $\mathbf{U_C(t)}$ dans l'équation différentielle on trouve la période propre : $\mathbf{T_0 = 2\pi\sqrt{L\,C}}$

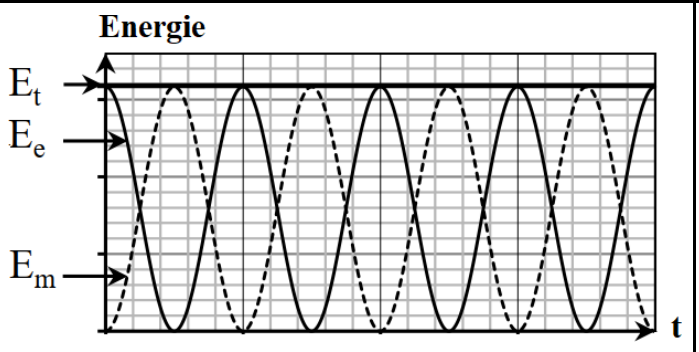
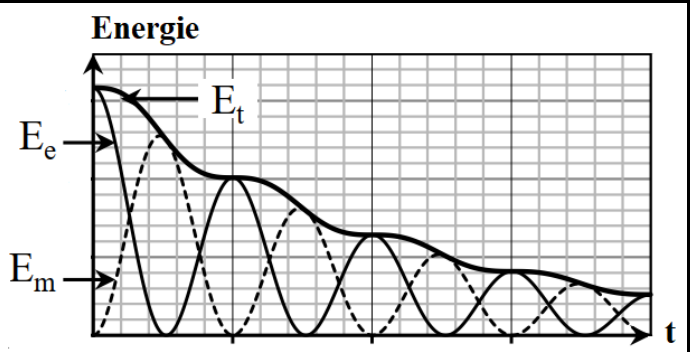
iii. Régimes d'oscillations

1) Les trois régimes d'oscillations

Régime périodique	Régime pseudopériodique	Régime apériodique
 ($\mathbf{R + r = 0}$)	 ($\mathbf{R + r}$ faible)	 ($\mathbf{R + r}$ grande)
la période propre : $\mathbf{T_0 = 2\pi\sqrt{L\,C}}$	la pseudo-période : $\mathbf{T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{L\,C}}$	pas d'oscillations

2) L'énergie dans un circuit RLC

- L'énergie totale d'un circuit (**RLC**) série est donnée par : $\mathbf{E_T = E_m + E_e = \frac{1}{2}.C.U_C{}^2 + \frac{1}{2}.L.i^2}$

$(\mathbf{R + r = 0})$	$(\mathbf{R + r \neq 0})$
	

- Dans le régime périodique $(\mathbf{R + r = 0})$ il y-a conservation de l'énergie totale. $\mathbf{\frac{dE_T}{dt} = 0}$

$$\mathbf{E_T = \frac{1}{2}.C.U_{cmax}^2 = \frac{1}{2}.L.i_{max}^2}$$

- Dans le régime pseudo périodique et apériodique $(\mathbf{R + r \neq 0})$ il y a dissipation d'énergie par effet joule

$$\mathbf{\frac{dE_T}{dt} = -(R + r).i^2}$$

3) Entretien des oscillations

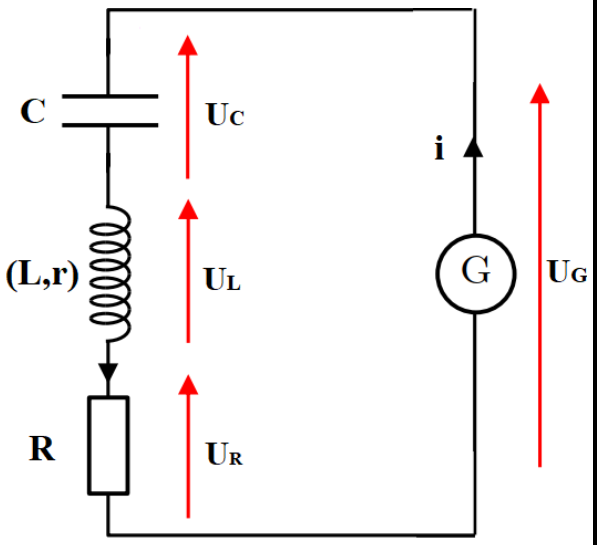
Principe

Dans un circuit (**RLC**), l'amortissement des oscillations est dû à une perte d'énergie par effet Joule
Les oscillations peuvent être entretenues par un générateur **G** qui compense les pertes d'énergie.

Etude théorique

On réalise le montage suivant dans lequel le générateur **G** délivre une tension proportionnelle à l'intensité du courant qu'il débite. $\mathbf{U_G = k.i}$

En appliquant la loi d'additivité des tensions :



$$U_C + U_R + U_L = U_G$$

$$U_C + R.i + r.i + L\frac{di}{dt} = k.i$$

$$U_C + (R + r - k)i + L\frac{di}{dt} = 0$$

$$U_C + (R + r - k)C\frac{dU_C}{dt} + LC\frac{d^2U_C}{dt^2} = 0$$

$$\mathbf{\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{R+r-k}{L}.\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC}U_C = 0}$$

On règle **k** sur la valeur : $\mathbf{k = R + r}$

L'équation différentielle devient : $\mathbf{\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}U_C = 0}$

C'est l'équation différentielle d'un circuit (**LC**) non amortie de période $\mathbf{T_0 = 2\pi\sqrt{L\,C}}$

Les ondes électromagnétiques - Modulation

i. Ondes électromagnétiques

1) Définition

Les ondes électromagnétiques se propagent dans toutes les directions dans un milieu homogène et isolant,
Leurs vitesse de propagation dans le vide (célérité) vaut : $\mathbf{c = 3.10^8\ m.s^{-1}}$

2) Transmission d'information

Information → Modulation → Transmission → Démodulatin → Réception de l'information

Remarque

Pour transmettre un signal sinusoïdal de la forme : $\mathbf{u(t) = U_m.\ Cos\ (2\pi f.t + \varphi)}$, on peut moduler une de ces caractéristiques : l'amplitude $\mathbf{U_m}$, la fréquence **f** ou la phase à l'origine **φ**

ii. Modulation d'amplitude

1) Principe de modulation

Le principe de modulation d'amplitude consiste à transmettre une onde de basse fréquence à l'aide d'une onde électromagnétique porteuse de haute fréquence.

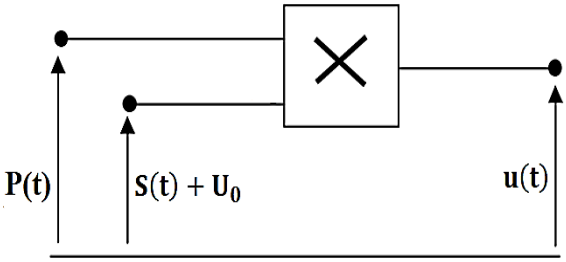
2) La modulation d'amplitude

Soit $\mathbf{S(t)}$ un signal sinusoïdal de basse fréquence à transmettre (signal modulant), de fréquence f_s
Pour transmettre $\mathbf{S(t)}$ on utilise une onde électromagnétique porteuse $\mathbf{p(t)}$ de fréquence $F_p >> f_s$

Signal modulant	Onde porteuse
$\mathbf{S(t) = S_m.\cos(2\pi f_s t)}$	$\mathbf{p(t) = P_m.\cos(2\pi F_p t)}$

3) Expression de la tension modulée en amplitude

Pour que la tension soit modulée il faut que son expression soit de la forme : $\mathbf{u(t) = U_m(t).\cos(2\pi F_p t)}$



- Pratiquement on utilise la composante **AD633** (multiplieur) de facteur multiplicateur **k**, on obtient la tension modulée u(t) en amplitude en multipliant les deux fonctions $\mathbf{k\ (S(t) + U_0)}$ et $\mathbf{p(t)}$

$$u(t) = k.(S(t) + U_0).p(t) = kP_m[S_m\cos(2\pi f_s t) + U_0]\cos(2\pi F_p t)$$

$$u(t) = kP_mU_0\left[\frac{S_m}{U_0}\cos(2\pi f_s t) + 1\right]\cos(2\pi F_p t)$$

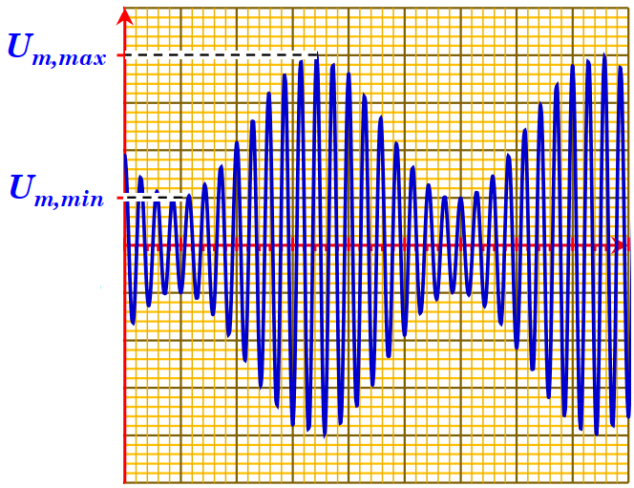
On pose : $\mathbf{A = kP_mU_0}$ et $\mathbf{m = \frac{S_m}{U_0}}$:

$$\mathbf{u(t) = A[m\cos(2\pi f_s t) + 1]\cos(2\pi F_p t)}$$

$$u(t) = U_m(t).\cos(2\pi F_p t)$$

Avec $\mathbf{U_m(t) = A[m\cos(2\pi f_s t) + 1]}$

4) Qualité de la modulation



- Le taux de modulation **m** est défini par la relation :

$$\mathbf{m = \frac{S_m}{U_0} = \frac{U_{max} - U_{min}}{U_{max} + U_{min}}}$$

- Pour obtenir une modulation d'amplitude de bonne qualité il faut que : $\mathbf{m < 1}$ et $\mathbf{F_p >> f_s}$

iii. Démodulation d'amplitude

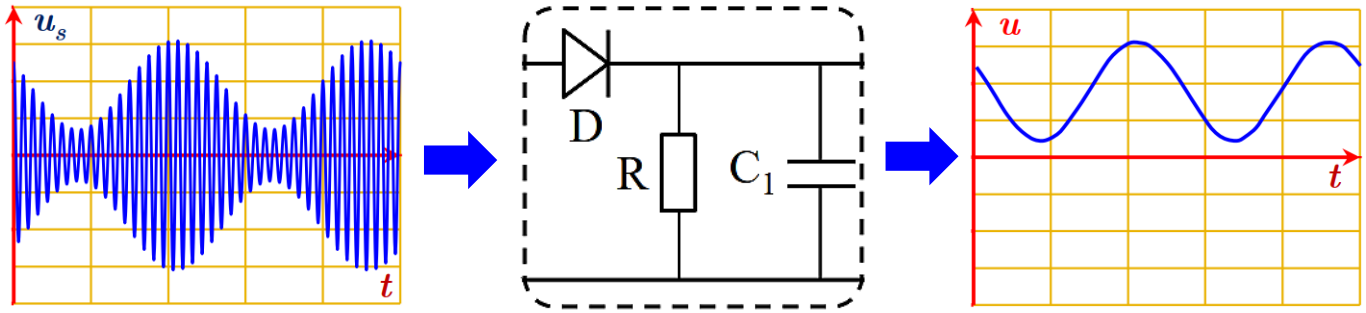
1) Principe

La démodulation consiste à extraire le signal modulant **s(t)** du signal modulé **u(t)**.

2) Détection d'enveloppe

Constitué par une diode et une association **RC** parallèle qui constitue un filtre passe-bas.

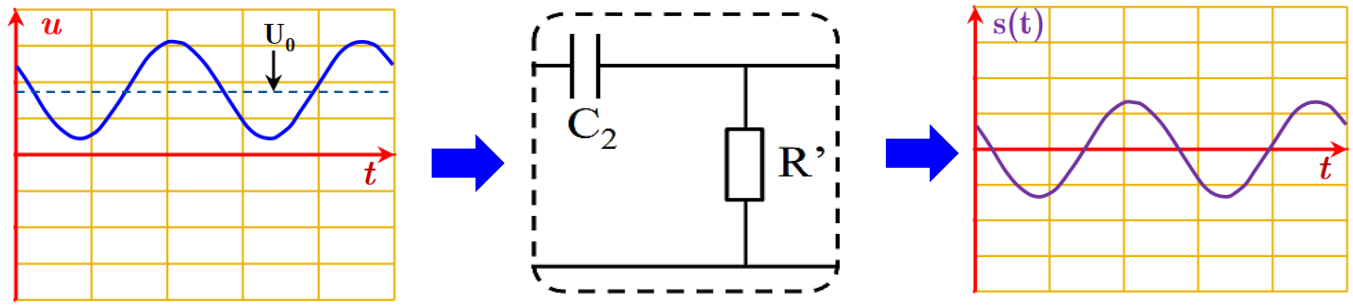
- La diode supprime les alternances négatives de la tension modulée.
- Le circuit **RC** permet d'éliminer la tension dû à la porteuse.



Remarque : Pour avoir une bonne détection d'enveloppe il faut que : $T_P \ll \tau = RC_1 < T_S$

3) Élimination de la tension de décalage U_0

Cette étape consiste à éliminer la tension constante U_0 par un filtre passe-haut (qui laisse passer les signaux de hautes fréquences).



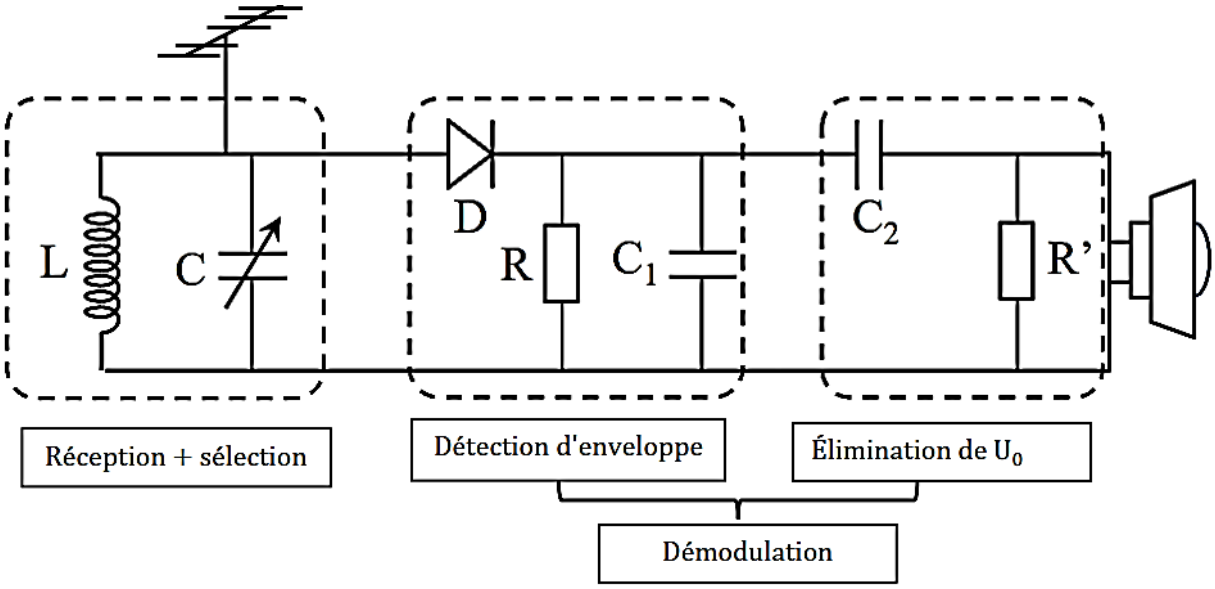
iv. Réaliser un récepteur d'émission radio AM

Un récepteur radio **AM** est composé des éléments suivants :

- Une antenne qui capte les ondes-radio.
- Un circuit **LC** pour sélectionner la fréquence de l'onde porteuse que l'on veut capter.
- Un circuit de démodulation d'amplitude.

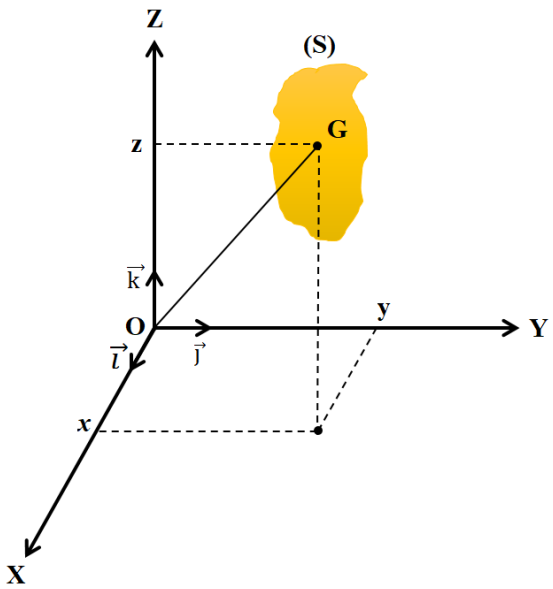
Remarque

Pour sélectionner un signal émet, il faut que : $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = F_P$ avec $\begin{cases} f_0 : \text{fréquence propre du circuit LC} \\ F_P : \text{fréquence de l'onde porteuse} \end{cases}$



Lois de Newton

i. Repérage d'un point d'un mobile



1) Vecteur position

La position du centre d'inertie **G** d'un système (S) est repérée à chaque instant par le vecteur position $\overrightarrow{OG}$

Dans un repère cartésien : $\overrightarrow{OG} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

- Le module du vecteur position : $\|\overrightarrow{OG}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2) Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse instantanée du centre d'inertie **G** du solide est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur position :

$$\overrightarrow{V_G} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$$

$$\overrightarrow{V_G} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

- Le module du vecteur vitesse : $\|\overrightarrow{V_G}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

3) Vecteur accélération

Le vecteur accélération instantanée du centre d'inertie **G** du solide est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{a_G} = \frac{d\overrightarrow{V_G}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}$$

$$\overrightarrow{a_G} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

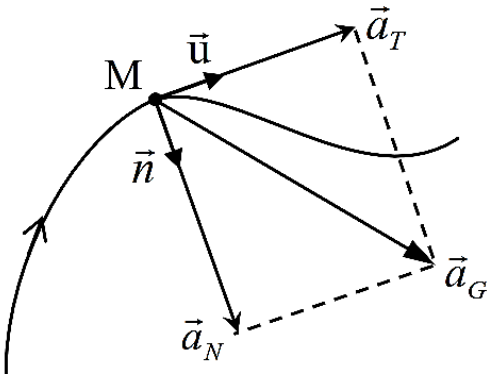
Le module du vecteur accélération : $\|\overrightarrow{a_G}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

4) La base locale de Frénet

La base de Frénet est un repère mobile lié au mouvement du point **M**, son origine est le point **M** et ses vecteurs unitaires sont :

$\vec{u}$: Tangent à la trajectoire et dirigé dans le sens du mouvement

$\vec{n}$: Normal à la trajectoire et dirigé vers l'intérieure de la concavité de la trajectoire.



L'accélération dans la base de Frénet :

$$\overrightarrow{a_G} = a_T\,\vec{u} + a_N\,\vec{n} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_T = \frac{dV}{dt} & \text{: accélération tangentielle} \\ a_N = \frac{V^2}{\rho} & \text{: accélération normale} \end{cases}$$

Avec **ρ** le rayon de courbure de la trajectoire au point **M**

Remarque

Dans le cas où la trajectoire est circulaire on a : $\rho = R$

5) Référentiels galiléens

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel la première loi de Newton (principe d'inertie) est vérifiée.

Remarque

Si **R** est un référentiel galiléen, tout référentiel **R'** en translation rectiligne uniforme par rapport à **R** est un référentiel galiléen.

ii. Les lois de Newton

1) La 1^{ére} loi de Newton (principe d'inertie)

Enoncée : dans un référentiel galiléen lorsque un système est isolé ou pseudo-isolé alors son centre d'inertie est immobile ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{V} = \overrightarrow{Cte} \\ \vec{V} = \vec{0} \end{cases}$

2) La 2ème loi de Newton (principe fondamentale de la dynamique)

Enoncée : dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures exercées sur un système est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération $\overrightarrow{a_G}$ $\quad m\,\overrightarrow{a_G} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$

3) La 3ème loi de Newton (principe d'action et de réaction)

Enoncé : La force $\overrightarrow{F_{A/B}}$ exercée par un système **A** sur un système **B** et la force $\overrightarrow{F_{B/A}}$ exercée par le système **B** sur un système **A** ont les mêmes valeurs, mêmes directions et des sens opposés $\quad \overrightarrow{F_{B/A}} = -\overrightarrow{F_{A/B}}$

iii. Mouvement rectiligne uniformément varié

1) Définition

Le mouvement du centre d'inertie **G** d'un corps solide est rectiligne uniformément varié, si la trajectoire de **G** est rectiligne et le vecteur accélération est constante : $\quad \overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{cte}$

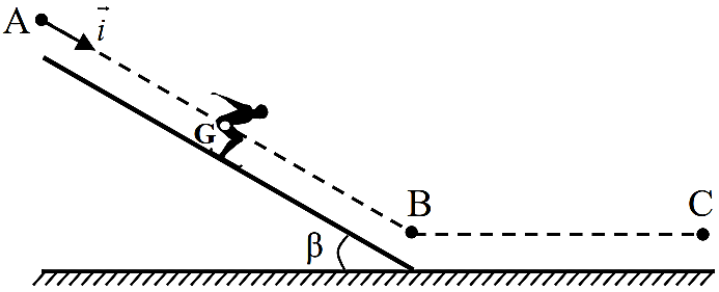
2) Les équations horaires du mouvement

On considère un mouvement rectiligne uniformément varié : $\overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{cte}$

On suppose que le mouvement s'effectue selon l'axe (Ox) : $\quad a_x = cte$

- L'équation horaire de la vitesse $V_x(t)$: Intégration + C.I: $\quad V_x(t) = a_x.t + V_{x0}$
- L'équation horaire de l'abscisse $x(t)$: Intégration + C.I: $\quad x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + V_{x0}t + x_0$

iv. Application



Un skieur de masse **m** et de centre d'inertie **G** part à $t_0 = 0$ au point **A** avec une vitesse initiale V_0.

Partie AB : les frottements sont négligeables

Le système étudié : (Le skieur)

- Les forces exercées :

Le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$

La réaction du plan $\vec{R}$

- On applique la 2^{éme} loi de newton :

$$m\,\overrightarrow{a_G} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} \quad \Leftrightarrow \quad m\,\overrightarrow{a_G} = \vec{P} + \vec{R}$$

Par projection sur l'axe (Ox) : $\quad m\,a_x = m\,g\,\sin\beta + 0 \quad \Leftrightarrow$ l'accélération : $\quad a_x = g\sin\beta$

L'équation horaire du mouvement est : $\quad x(t) = \frac{g\sin\beta}{2}t^2 + V_0 t + x_A$

Partie BC : le mouvement se fait avec frottement

Les frottements équivalents à une force horizontale d'intensité $f = R_T$ constante et de sens opposé au sens du mouvement.

- Les forces exercées sur le skieur dans la partie BC

Le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$

La réaction du plan $\vec{R}$

- On applique la 2^{éme} loi de newton $\quad m\,\overrightarrow{a_G} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} \quad \Leftrightarrow \quad m\,\overrightarrow{a_G} = \vec{P} + \vec{R}$

Projection sur l'axe (Ox) : $\quad m\,a_x = 0 - f \quad \Leftrightarrow$ l'accélération : $\quad a_x = -\frac{f}{m}$

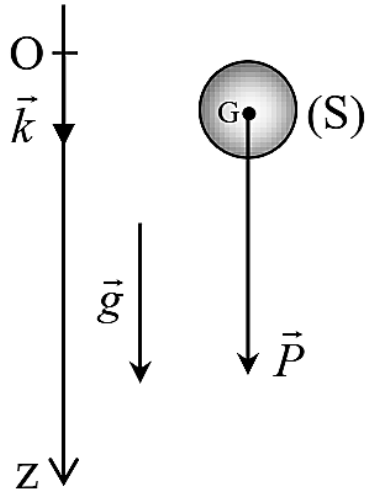
- L'équation horaire du mouvement : $\quad x(t) = -\frac{f}{2m}t^2 + V_B t + x_B$

La chute verticale d'un solide

i. La chute libre d'un corps solide

1) Définition

Un solide est en chute libre s'il n'est soumis qu'à son poids.



2) Equations horaires du mouvement

Soit un solide (S) de masse **m** en chute libre dans le champ de pesanteur.

On étudie le mouvement du solide (S) dans le repère $\boldsymbol{R(O.\vec{k})}$

- On applique la deuxième loi de Newton :

$$m\,\vec{a_G} = \sum \vec{F_{ext}} \quad \Leftrightarrow \quad m\,\vec{a_G} = \vec{P}$$

$$m\,\vec{a_G} = m\,\vec{g} \quad \Leftrightarrow \quad a_z = g \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{z} = g$$

Intégration + C.I: $\mathbf{V_z = g\,t + V_{z0}}$

- L'équation horaire du mouvement $z(t)$ est :

Intégration + C.I: $\mathbf{z(t) = \frac{1}{2} g\,t^2 + V_{z0}t + z_0}$ avec $\begin{cases} V_{z0} : \text{la vitesse à } t = 0s \\ z_0 : \text{l'altitude à } t = 0s \end{cases}$

ii. La chute verticale avec frottement

1) Forces exercées par un fluide sur un solide

a) Poussée d'Archimède

La poussée d'Archimède $\vec{F_a}$: est une force de contact exercée par un fluide (liquide ou gaz) sur un solide immergé dans ce fluide.

b) Caractéristiques de la pousse d'Archimède

- **Point d'application :** centre d'inertie de la partie immergé.
- **Direction :** verticale
- **Sens :** du fluide vers le corps immergé.
- **Intensité :** $\mathbf{F_a = \rho_f . V_{im} . g = m_f . g}$

c) Force de frottement fluide

Les forces exercées par un fluide sur un solide (S) lorsqu'il est en mouvement sont équivalentes à une force unique $\vec{f}$ qui dépend de la vitesse du mobile.

d) Caractéristiques de la force de frottement fluide

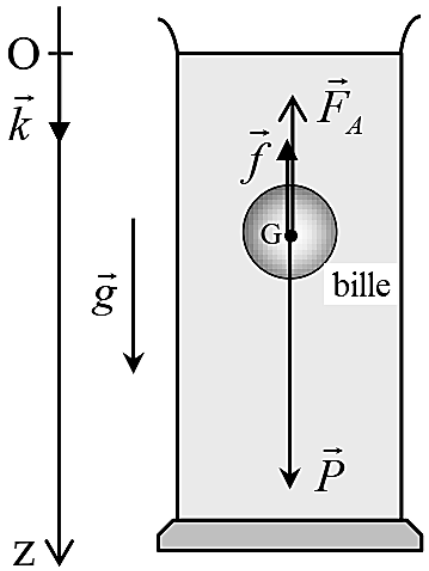
- **Point d'application :** centre d'inertie de (S)
- **Direction :** direction de $\vec{V}$ la vitesse du centre d'inertie de (S)
- **Sens :** sens opposé du sens de $\vec{V}$.
- **Intensité :** $\boldsymbol{f = k.V^n}$ avec $\begin{cases} k : \text{Constante dépend du fluide} \\ V : \text{Vitesse de G} \\ n : \text{nombre entiére} \end{cases}$

Remarque

- Pour des vitesses faibles : $\boldsymbol{n = 1} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f = k\,V}$
- Pour des vitesses importantes : $\boldsymbol{n = 2} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f = k\,V^2}$

2) Equation différentielle vérifiée par la vitesse

On considère une bille de masse **m**, en chute verticale dans une éprouvette remplie d'huile, on étudie le mouvement de la bille dans le repère $R(O.\vec{k})$ orienté vers le bas (figure ci-contre)



- Le système étudié : (la bille)
- Les forces exercées sur la bille :

Poids de la bille $\vec{P} = m\,\vec{g} = mg\vec{k}$

Poussée d'Archimède $\vec{F_a} = -m_f\vec{g} = -m_f g\vec{k}$

Force de frottement fluide $\vec{f} = -k.\overrightarrow{V^n} = -kV^n\vec{k}$

- On applique la 2éme loi de newton

$$m\,\vec{a_G} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} \quad \Leftrightarrow \quad m\,\vec{a_G} = \vec{P} + \vec{F_a} + \vec{f}$$

Projection sur (Oz) $\quad m\,a_z = mg - m_f g - kV^n$

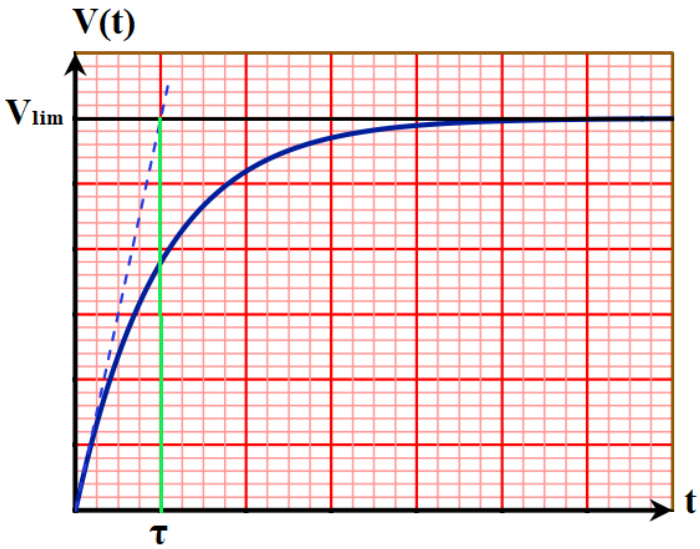
$$\frac{dV}{dt} = g(1 - \frac{m_f}{m}) - \frac{k}{m}V^n$$

$$\frac{dV}{dt} = A - B\,V^n \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A = g(1 - \frac{m_f}{m}) \\ B = \frac{k}{m} \end{cases}$$

3) Les grandeurs caractérisant le mouvement

a) La constante de temps τ

La tangente à la courbe $V = f(t)$ au point O coupe l'asymptote en un point d'abscisse τ appelé temps caractéristique.



b) La vitesse limite V_{lim}

La fonction V(t) se stabilise à une vitesse limite V_{lim}

$$\frac{dV}{dt} = A - B\,V_{lim}^n = 0 \Leftrightarrow V_{lim} = (\frac{A}{B})^{\frac{1}{n}}$$

c) L'accélération initiale a_0

L'accélération initiale est donnée par :

$$a_0 = A - B\,V_0^n = A \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = g(1 - \frac{m_f}{m})$$

(Dans ce cas : $V_0 = 0$)

4) Résolution de l'équation différentielle par la méthode d'Euler

La méthode d'Euler est une méthode numérique permet de résoudre l'équation différentielle $\frac{dV}{dt} = A - B\,V^n$

Les étapes de la méthode d'Euler

- **1ère étape :** calcule de l'accélération a_i à la date t_i : $a_i = A - B\,V_i^n$
- **2ème étape :** calcule de la vitesse V_i à la date $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ (Δt : appelée pas du calcul)

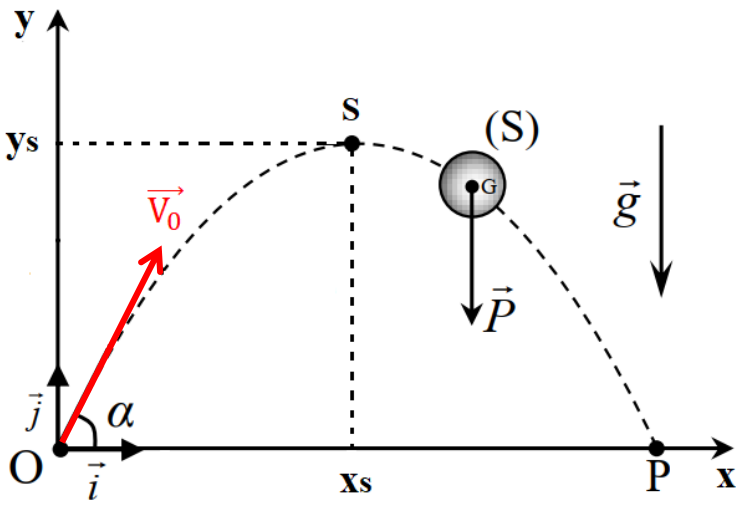
$$a_i = \frac{V_{i+1} - V_i}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad V_{i+1} = a_i\,\Delta t + V_i$$

Etape **i**	Date t_i	Vitesse V_i	Accélération a_i
0	$t_0 = 0$	V_0	$a_0 = A - B\,V_0^n$
1	$t_1 = t_0 + \Delta t$	$V_1 = a_0\Delta t + V_0$	$a_1 = A - B\,V_1^n$
2	$t_2 = t_1 + \Delta t$	$V_2 = a_1\Delta t + V_1$	$a_2 = A - B\,V_2^n$
3	$t_3 = t_2 + \Delta t$	$V_3 = a_2\Delta t + V_2$	$a_3 = A - B\,V_3^n$

Mouvements plans

i. Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur

Un projectile **(S)** de masse **m** est lancée en un point **O** avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ faisant un angle α avec l'horizontale, le projectile se déplace dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ (supposé uniforme)



1) Equations horaires du mouvement

On étudie le mouvement dans le repère $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

- Le système étudié : (le projectile)
- La seule force exercée sur le projectile **(S)** est son poids : $\vec{P} = m\,\vec{g} = -mg\,\vec{\jmath}$
- On applique la 2éme loi de newton

$$m\,\overrightarrow{a_G} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P}$$

$$(*) \quad m\,\overrightarrow{a_G} = -m\,g\,\vec{\jmath}$$

- Les conditions initiales (C.I) : $\begin{cases} V_{0x} = V_0.\cos\alpha \\ V_{0y} = V_0.\sin\alpha \end{cases}$ et $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$

Projection de (*) sur l'axe (Ox)	Projection de (*) sur l'axe (Oy)
$a_x = 0$	$a_y = -g$
$\frac{dV_x}{dt} = 0$ et $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$	$\frac{dV_y}{dt} = -g$ et $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$
Intégration + C.I : $V_x(t) = V_0.\cos\alpha$	Intégration + C.I : $V_y(t) = -g\,t + V_0.\sin\alpha$
Intégration + C.I : $x(t) = V_0.\cos\alpha\,.\,t$	Intégration + C.I : $y(t) = -\frac{1}{2}g\,t^2 + V_0.\sin\alpha\,t$

2) Les caractéristiques de la trajectoire

a) Équation de la trajectoire

En éliminant le paramètre temps **t** des équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ on obtient l'équation de la trajectoire

$$y = \frac{-g}{2.V_0^2.\cos\alpha^2}\,x^2 + \tan\alpha\,.\,x \quad \text{(Équation d'une parabole)}$$

b) La portée x_P

La portée est la distance entre le point de lancement **O** et le point d'impact **P** sur le plan horizontal

C'est la valeur de x qui annule y : $x_P = OP = \frac{2.V_0^2.\cos\alpha\sin\alpha}{g}$

Remarque : la portée est maximale pour un angle $\alpha = 45°$

c) Le sommet / la flèche S de la trajectoire

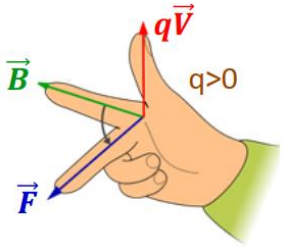
Le sommet **S** de la trajectoire est l'altitude maximale atteinte par le projectile.

Au point **S** : $V_y(t_S) = 0 \Leftrightarrow -g\,t_S + V_0.\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow t_S = \frac{V_0.\sin\alpha}{g}$

- On remplace t_S dans $x(t)$ et $y(t)$: les coordonnées du sommet **S** : $\begin{cases} x_S = \frac{V_0^2.\cos\alpha\sin\alpha}{g} \\ y_S = \frac{V_0^2\sin\alpha^2}{2g} \end{cases}$

ii. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique

1) Force magnétique



Règle de la main droite

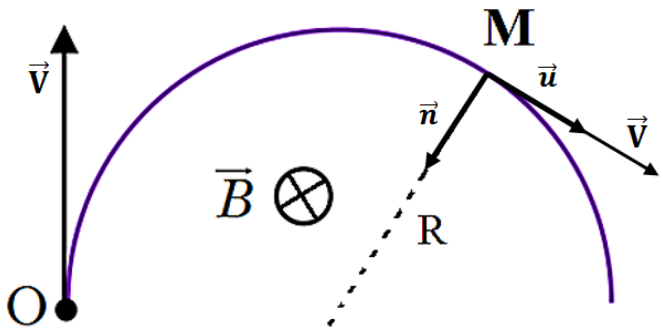
Toute particule chargée (de charge q) en mouvement avec une vitesse $\vec{V}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ est soumis à la force de Lorentz donnée par :

$$\vec{F} = q.\vec{V} \wedge \vec{B}$$

Remarque

Si la charge de la particule est négative $q < 0$ on utilise la main gauche.

2) Mouvement d'une particule chargée ($q < 0$) dans un champ magnétique uniforme



On considère une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique uniforme dont le vecteur $\vec{B}$ est orthogonal au vecteur vitesse $\vec{V}$ de la particule.

La particule de charge ($q < 0$) pénètre dans le champ magnétique en O à $t = 0$

- Le système étudié : (la particule chargée)
- Les forces exercées sur la particule :

La force magnétique $\vec{F} = q.\vec{V} \wedge \vec{B}$ de module $F = |q|.B.V\sin(\vec{V}.\vec{B})$

(On néglige le poids de la particule)

- On applique la 2éme loi de newton : $m\,\vec{a} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} \Leftrightarrow m\,\vec{a} = \vec{F} = q.\vec{V} \wedge \vec{B}$

$$\vec{a} = \frac{q}{m}.\vec{V} \wedge \vec{B}$$

3) Le rayon de courbure de la trajectoire

- L'accélération dans la base de Frénet : $\vec{a} = \frac{|q|}{m}.V.B.\sin(\vec{V}.\vec{B})\,\vec{n} = \frac{dV}{dt}\vec{u} + \frac{V^2}{\rho}\,\vec{n}$
- La vitesse de la particule : $\frac{dV}{dt} = 0$ d'où $V = cte$

On a : $\frac{V^2}{\rho} = \frac{|q|}{m}.V.B.\sin(\vec{V}.\vec{B})$ et comme $(\vec{V} \perp \vec{B}) \Leftrightarrow \sin(\vec{V}.\vec{B}) = 1$

- Le rayon de courbure de la trajectoire est $\rho = \frac{m.V}{|q|.B} = cte = R$, la trajectoire est donc circulaire

4) La nature du mouvement de la particule

Puisque le rayon de la courbure est constante $\rho = \frac{m.V}{|q|.B} = cte$ et la vitesse est constante $V = cte$ donc le mouvement de la particule chargée est circulaire uniforme.

Satellites artificielles et planètes

i. Les lois de Kepler

Référentielle héliocentrique

Est un référentielle a pour origine le centre du soleil et ces axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines.

Référentielle géocentrique

Est un référentielle a pour origine le centre de la terre et ces axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines.

1^{ér} loi de Kepler : Loi des orbites

Dans un référentiel héliocentrique, chaque planète décrit une ellipse dont le centre du Soleil occupe un des foyers de l'ellipse.

2^{éme} loi de Kepler : Loi des aires

Le segment de droite reliant les centres de gravité de soleil (S) et de la planète (P) balaie des aires égales en des temps égaux.

3^{éme} loi de Kepler : Loi des périodes

Le rapport du carré de la période de révolutions ***T*** et le cube du demi grand axe **a** est constant.

$$\frac{T^2}{a^3} = cte$$

ii. Étude du mouvement d'une planète autour du soleil

1) Loi de la gravitation universelle (rappel)

Deux corps ponctuels **A** et **B**, de masses $\mathbf{m_A}$ et $\mathbf{m_B}$, séparés par la distance **d**, exercent l'un sur l'autre des forces d'interactions $\overrightarrow{F_{A/B}}$ et $\overrightarrow{F_{B/A}}$ ayant :

- Même droite d'action (AB)
- Des sens opposés
- Même intensité : $F_{A/B} = F_{B/A} = G.\frac{m_A m_B}{d^2}$

G : constante de gravitation universelle **G = 6.67. 10 $^{-11}$ (S.I)**

2) Étude du mouvement d'une planète autour du soleil

Une planète **(P)** de masse $\mathbf{m_P}$ décrit un mouvement autour du soleil.

On choisit le référentiel héliocentrique pour étudier le mouvement

- Le système étudié : (la planète P)
- Les forces exercées sur (P) :

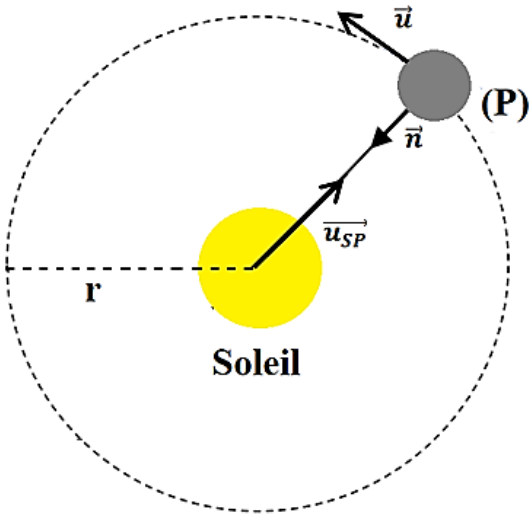
La force exercée par le soleil : $\overrightarrow{F_{S/P}} = -G.\frac{m_P M_S}{r^2}\overrightarrow{u_{SP}}$

- On applique la 2^{éme} loi de newton :

$$m_P\,\vec{a} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} \quad \Leftrightarrow \quad m_P\,\vec{a} = \overrightarrow{F_{S/P}} = -G.\frac{m_P M_S}{r^2}\overrightarrow{u_{SP}}$$

$$\vec{a} = -G.\frac{M_S}{r^2}\overrightarrow{u_{SP}}$$

Remarque : $\overrightarrow{u_{SP}} = -\vec{n}$



- Dans la base de Frénet : $\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{u} + \frac{V^2}{r}\vec{n} = G.\frac{M_S}{r^2}\vec{n}$

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{V^2}{r} = G.\frac{M_S}{r^2}$$

- La vitesse du centre de la planète est alors : $V = \sqrt{\frac{G.M_S}{r}} = cte$

La période de révolution T

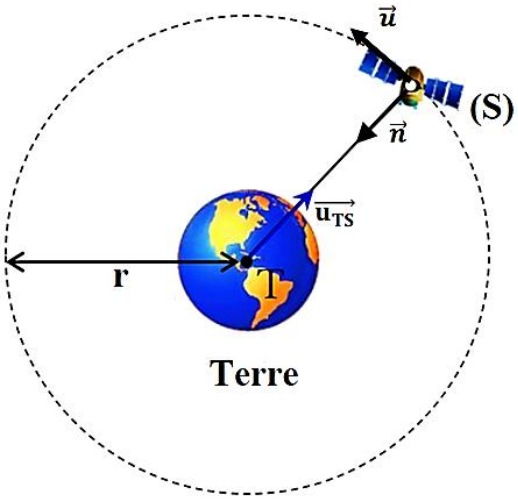
La période de révolution d'une planète est la durée d'un tour complet de son centre autour du soleil.

On a $T = \frac{2\pi.r}{V}$ et $V = \sqrt{\frac{G.M_S}{r}}$ $\Leftrightarrow$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G.M_S}}$

3) Étude du mouvement d'un satellite autour de la terre

Un satellite **(S)** de masse $\mathbf{m_S}$ décrit un mouvement autour de la terre

On choisit le référentiel géocentrique pour étudier le mouvement.



Le système étudié : (le satille S)

- Les forces exercées sur (S) :

La force exercée par la terre $\overrightarrow{F_{T/S}} = -G.\frac{m_S M_T}{r^2}\overrightarrow{u_{TS}}$

- On applique la 2éme loi de newton :

$$m_S\,\vec{a} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} \quad \Leftrightarrow \quad m_S\,\vec{a} = \overrightarrow{F_{T/S}} = -G.\frac{m_S M_T}{r^2}\overrightarrow{u_{TS}}$$

- Dans la base de Frénet :

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{u} + \frac{V^2}{r}\vec{n} = G.\frac{M_T}{r^2}\vec{n}$$

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{V^2}{r} = G.\frac{M_T}{r^2}$$

- La vitesse du centre du satellete est alors : $V = \sqrt{\frac{G.M_T}{r}} = cte$ avec $r = R_T + h$

La période de révolution T

La période de révolution d'un satellite est la durée d'un tour complet autour de la terre, $T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{G.M_T}}$

4) La satellisation

La satellisation c'est mettre un satellite sur son orbite autour de la terre et de lui donner une vitesse suffisante pour avoir un mouvement circulaire uniforme autour de la terre.

5) Les satellites géostationnaires

Pour qu'un satellite soit géostationnaire par rapport à la terre, il faut :

- Qu'ils décrivent un mouvement circulaire uniforme dans un plan contenant l'équateur.
- Qu'ils tournent dans le même sens que la terre.
- Que leur période de révolution soit égale à la période de rotation de la terre ($\mathbf{T_{terre} \approx 24h}$).

Remarque

On peut calculer la hauteur h à laquelle un satellite soit géostationnaire par rapport à la terre.

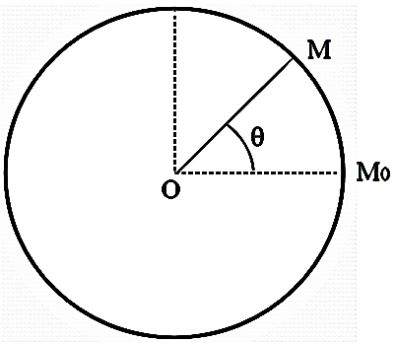
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G.M_T}} \quad \Leftrightarrow \quad h = \sqrt[3]{\frac{T^2 G M_T}{4\pi^2}} - R_T$$

Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

i. Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

1) Définition

Un corps solide est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ) si : tous les points du solide décrivent des trajectoires circulaires centrées sur l'axe de rotation (Δ).



2) Abscisse curviligne et abscisse angulaire

- L'abscisse angulaire du point **M** à l'instant **t** est défini par :

$$\theta(t) = (\widehat{\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM}})$$

- L'abscisse curviligne du point **M** à l'instant **t** est défini par :

$$S(t) = \widehat{M_0 M}$$

3) Relation entre l'abscisse curviligne et l'abscisse angulaire

L'abscisse angulaire et l'abscisse curviligne sont liées par la relation :

$S = R.\theta$ avec **R** : le rayon de la trajectoire circulaire décrit par le point **M**.

4) La vitesse angulaire

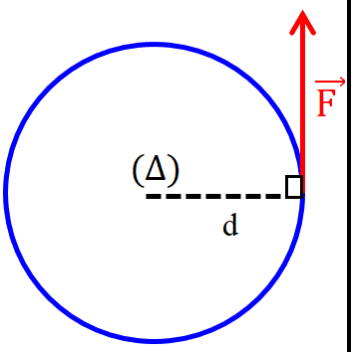
- La vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est la dérivée par rapport au temps de l'abscisse angulaire : $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$
- La vitesse linéaire **V** est la dérivée par rapport au temps de l'abscisse curviligne : $V = \frac{dS}{dt}$
- La relation entre la vitesse angulaire et la vitesse linéaire : $V = R.\dot{\theta}$

5) L'accélération angulaire

- L'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ est la dérivée par rapport au temps de la vitesse angulaire : $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
- Dans la base de Frénet : $\overrightarrow{a_G} = a_T\,\vec{u} + a_N\,\vec{n}$ avec $\begin{cases} a_T = \frac{dV}{dt} = R.\ddot{\theta} \\ a_N = \frac{V^2}{R} = R.\dot{\theta}^2 \end{cases}$

ii. La relation fondamentale de la dynamique (RFD)

1) Rappel (moment d'une force)



Le moment par rapport à un axe (Δ) d'une force $\vec{F}$ est donné par la relation :

$$M_\Delta(\vec{F}) = \pm F.d$$

Le signe **(±)** dépend du sens positif de rotation.

2) Énoncé de la RFD

Dans un référentiel galiléen, la somme des moments des forces, appliquées à un solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ), est égale au moment d'inertie J_Δ du solide multiplie par l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$

$$\sum M_\Delta\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

3) Cas particulières

- Si $\ddot{\theta} = 0$, le solide est en mouvement de rotation uniforme, l'équation horaire du mouvement :

$$\theta(t) = \dot{\theta}\,t + \theta_0$$

- Si $\ddot{\theta} = cte$ le solide est en mouvement de rotation uniformément variée, l'équation horaire du mouvement

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}\,t^2 + \dot{\theta}\,t + \theta_0$$

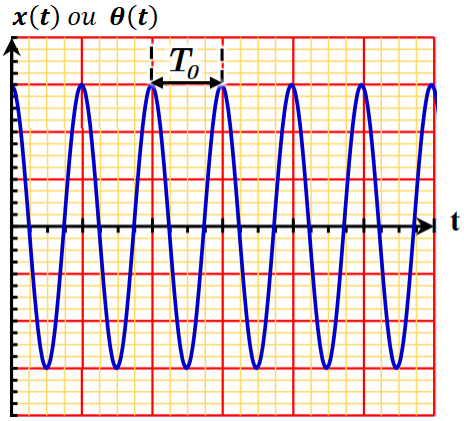
Systèmes oscillants - aspectes énergétiques

i. Oscillateur mécanique

1) Définition

Oscillateur mécanique est un mobile qui effectue un mouvement de va et viens autour de sa position d'équilibre stable (exemples : pendule élastique, pendule de torsion, pendule pesant, pendule simple)

2) Caractéristiques des mouvements oscillatoires



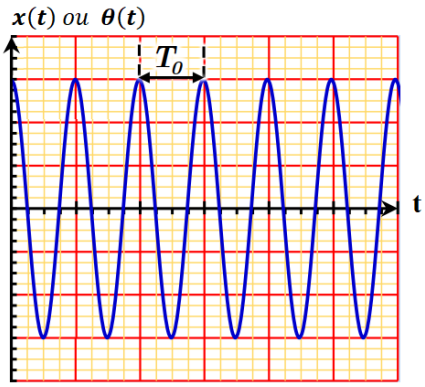
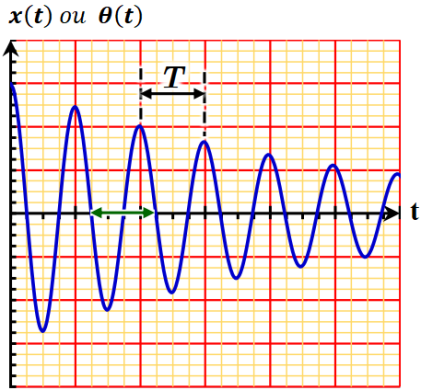
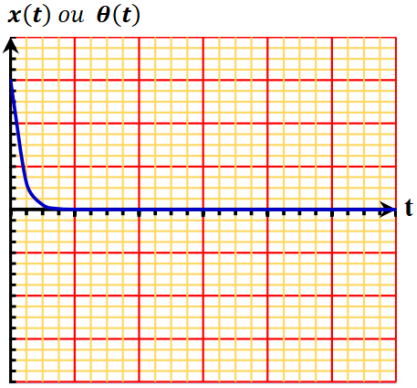
- **La position d'équilibre stable**
  La position à laquelle le système tend à revenir lorsqu'on l'éloigne légèrement.
- **La période propre**
  Le temps nécessaire pour effectuer une oscillation.
- **L'amplitude**
  La grandeur qui exprime le décalage de l'oscillateur de sa position d'équilibre.

3) Amortissement des oscillations mécaniques

L'amortissement d'un système est une atténuation de l'amplitude à cause du frottement.

- **Frottement fluide :** frottement qui se fait entre l'oscillateur et un corps fluide (atténuation non linéaire)
- **Frottement solide :** frottement qui se fait entre l'oscillateur et un corps solide (atténuation linéaire)

On distingue trois régimes :

Régime périodique	Régime pseudopériodique	Régime apériodique
 (pas de frottement) la période propre :$\mathbf{T_0}$	 faible amortissement la pseudo-période : $\mathbf{T \approx T_0}$	 fort amortissement pas d'oscillations

4) Oscillations forcées

Oscillations forcée est liée l'oscillateur à un appareil appelé excitateur qui impose sa période $\mathbf{T_e}$ à l'oscillateur (résonateur)

5) La résonance

Le phénomène de résonance mécanique se produit lorsque la période $\mathbf{T_e}$ des oscillations forcées est voisine de la période propre $\mathbf{T_0}$ du résonateur.

ii. Travail d'une force

1) Travail d'une force (cas de translation)

a) Travail d'une force constante

Le travail d'une force constante $\vec{F}$ appliquée à un corps solide en translation rectiligne, se déplace entre les positions **A** et **B**, est donné par :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{AB} = \|\vec{F}\|.\|\vec{AB}\|.\cos\alpha$$

b) Le travail d'une force non constante

Le travail d'une force non constante est donné par : $W_{AB}(\vec{F}) = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F}.\vec{dl}$

Exemple : le travail de la force du rappel $\vec{T} = -k\,x\,\vec{\imath}$ exercée par un ressort sur un solide se déplace entre les positions x_A et x_B est :

$$W_{AB}(\vec{T}) = \int_{x_A}^{x_B} \vec{T}.\vec{dx} = \int_{x_A}^{x_B} -k.x.dx = -k\int_{x_A}^{x_B} x.dx = -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_A}^{x_B} = \frac{1}{2}k\,x_A^2 - \frac{1}{2}k\,x_B^2$$

2) Travail d'une force (cas de rotation)

a) Le travail d'une force de moment constant

L'expression du travail d'une force de moment constante est : $W_{\theta_2\to\theta_1}(\vec{F}) = M_\Delta(\vec{F}).\,\Delta\theta$

b) Le travail d'une force de moment non constant

L'expression du travail d'une force de moment non constante est : $W_{\theta_2\to\theta_1}(\vec{F}) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_\Delta(\vec{F}).d\theta$

Exemple : le travail de couple de torsion de moment $M_\Delta(C) = -C.\theta$ exercée par un fil de torsion sur un solide se déplace entre les positions θ_1 et θ_2 :

$$W_{\theta_1\to\theta_2}(M_\Delta(C)) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_\Delta(C).d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} -C.\theta.d\theta = -C\int_{\theta_1}^{\theta_2} \theta.d\theta = -C\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{1}{2}C\,\theta_1^2 - \frac{1}{2}C\,\theta_2^2$$

iii. Energie d'un solide

1) Énergie cinétique

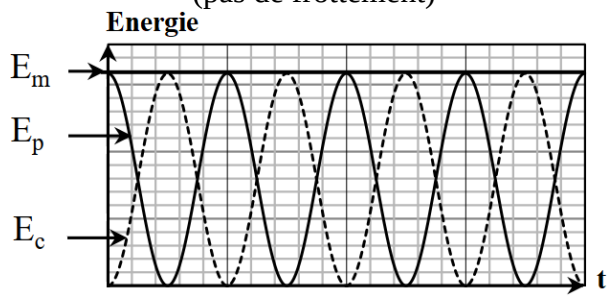
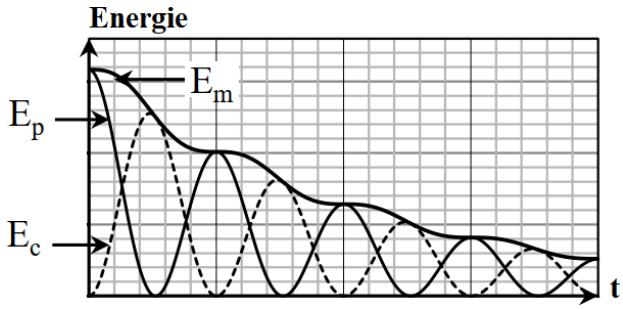
Cas de translation	Cas de rotation
$E_C = \frac{1}{2}m.V^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$	$E_C = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$

2) L'énergie potentielle

Energie potentielle de pesanteur	Energie potentielle élastique	Energie potentielle de torsion
$E_{pp} = m\,g\,z + Cte$	$E_{Pe} = \frac{1}{2}k\,x^2 + Cte$	$E_{Pt} = \frac{1}{2}C\,\theta^2 + Cte$

3) Énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un corps solide est égale à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle

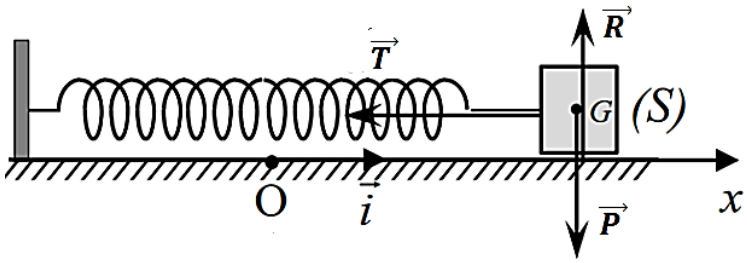
Régime périodique	Régime pseudopériodique
Conservation de l'énergie mécanique (pas de frottement) 	Diminution de l'énergie mécanique à cause du frottement 

iv. Pendule élastique

Un pendule élastique, ou système (solide-ressort) est constitué d'un solide, de masse **m**, fixé à un ressort de longueur initiale l_0 et de constante de raideur **k**,

1) Etude dynamique

Soit $\mathbf{R}(O.\vec{\imath})$ repère d'étude



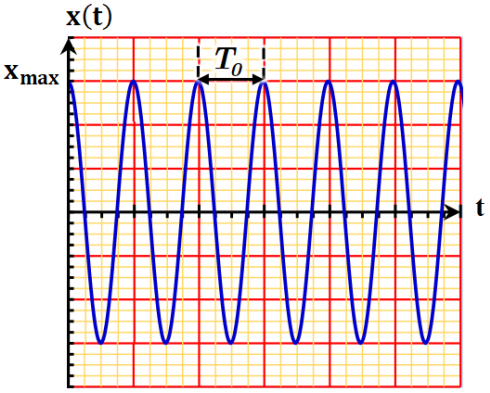
- Le système étudié : (solide (S))
- Les forces exercées sur (S) :
  - Le poids de la bille $\vec{P} = -m\,g\,\vec{\jmath}$
  - Réaction du plan $\vec{R} = R\,\vec{\jmath}$
  - Tension du ressort $\vec{T} = -k\,x\,\vec{\imath}$
- 2éme loi de newton $m\,\vec{a_G} = \sum \vec{F_{ext}} \quad \Leftrightarrow \quad m\,\vec{a_G} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R}$

Projection sur l'axe (Ox) $\quad m\,a_x = 0 - k\,x + 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\,\ddot{x} = -k\,x$

D'où l'équation différentielle : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

- La solution de l'équation différentielle est de la forme :

$x(t) = X_m \cos(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi)$ avec $\begin{cases} X_m : \text{Amplitude maximale} \\ T_0 : \text{la période propre} \\ \varphi : \text{la phase à l'origine des temps} \end{cases}$



- En remplaçant $x(t)$ et $\ddot{x}(t)$ dans l'équation différentielle on obtient la période propre : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

2) Etude énergétique

a) Energie cinétique

L'énergie cinétique du pendule élastique est donnée par :

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

b) Energie potentielle élastique E_{Pe}

L'énergie potentielle élastique d'un pendule élastique est l'énergie qu'il possède grâce à la déformation du ressort. $\quad E_{Pe} = \frac{1}{2}k\,x^2 + Cte$

Souvent on prend ($E_{Pe} = 0$ pour $x = 0$) ; donc $Cte = 0$ d'où : $\quad E_{Pe} = \frac{1}{2}\,k\,x^2$

c) Energie mécanique

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle (on prend :$E_{PP} = 0$)

$$E_m = E_C + E_{PP} + E_{Pe} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

d) Conservation de l'énergie mécanique

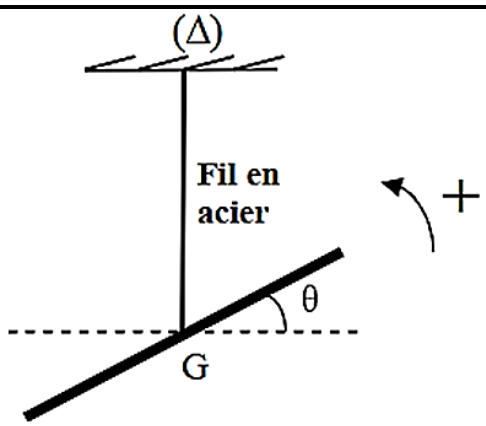
En absence du frottement l'énergie mécanique est conservée : $E_m = \frac{1}{2}m\,V_{max}^2 = \frac{1}{2}k\,X_{max}^2$

Remarque

On peut déterminer l'équation différentielle à partir de la conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m = cte \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

v. Pendule de torsion



1) Le moment du couple de torsion (rappel)

Quand un solide tourne autour de l'axe du fil, le fil réagit à la torsion en exerçant des forces de rappel équivalentes à un couple de moment :

$$\mathbf{M_\Delta(C) = -C.\theta} \quad \text{avec} \begin{cases} \theta : \text{l'angle de torsion en (rad)} \\ C : \text{constante de torsion dépend du fil} \end{cases}$$

2) Etude dynamique

Le pendule de torsion est constitué d'un fil de torsion et d'une tige horizontale, lorsqu'on écarte la tige de sa position d'équilibre elle oscille autour de sa position d'équilibre.

- On repère les positions de la tige à chaque instant par l'abscisse angulaire $\boldsymbol{\theta(t)}$
  Les forces exercées sur (la tige) :

➢ $\vec{P}$ Le poids de la tige de moment $M_\Delta(\vec{P}) = 0$ (La droite d'action de $\vec{P}$ est confondu avec (Δ))

➢ $\vec{R}$ Force exercée par le fil de moment $M_\Delta(\vec{R}) = 0$ (La droite d'action de $\vec{R}$ est confondu avec (Δ))

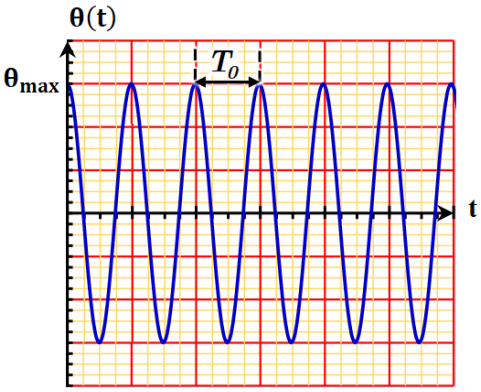
➢ Couple de torsion de moment $Mc = -C.\theta$

- On applique la relation fondamentale de la dynamique de rotation : $\mathbf{\sum M_\Delta(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_\Delta.\ddot{\theta}}$

$$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_C = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

$$0 + 0 - C.\theta = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

D'où l'équation différentielle : $\mathbf{\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}.\theta = 0}$



- La solution est de la forme :

$$\mathbf{\theta(t) = \theta_m \cos(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi)} \quad \text{avec} \begin{cases} \theta_m : \text{Amplitude maximale} \\ T_0 : \text{la période propre} \\ \varphi : \text{la phase à l'origine des temps} \end{cases}$$

En remplaçant $\ddot{\theta}(t)$ et $\theta(t)$ dans l'équation différentielle on obtient la période propre : $\mathbf{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}}$

3) Etude énergétique

a) Energie cinétique

L'énergie cinétique du pendule de torsion est définie par : $\mathbf{E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2}$

b) Energie potentielle de torsion E_{Pt}

L'énergie potentielle de torsion d'un pendule de torsion est définie par : $\mathbf{E_{Pt} = \frac{1}{2} C\,\theta^2 + Cte}$

Souvent on prend ($E_{Pt} = 0$ pour $\theta = 0$) ; donc $Cte = 0$ d'où : $\mathbf{E_{Pt} = \frac{1}{2} C\,\theta^2}$

c) Energie mécanique

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

$$\mathbf{E_m = E_C + E_{Pt} = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C\,\theta^2}$$

d) Conservation de l'énergie mécanique

En absence du frottement l'énergie mécanique est conservée.

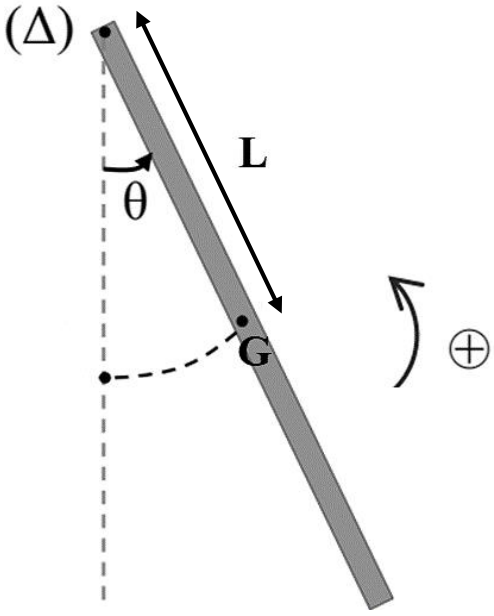
$$\mathbf{E_m = \frac{1}{2} J_\Delta\, \dot{\theta}^2_{max} = \frac{1}{2} C\,\theta^2_{max}}$$

Remarque

On peut déterminer l'équation différentielle à partir de la conservation de l'énergie mécanique

$$\mathbf{E_m = cte \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}.\theta = 0}$$

vi. Pendule pesant



On appelle pendule pesant tout solide mobile autour d'un axe ne passant pas par son centre de gravité et placé dans un champ de pesanteur.

1) Etude dynamique

On repère les positions du solide de langueur **2L** par l'abscisse angulaire $\theta(t)$

- Les forces exercées sur le solide :
- ➢ $\vec{P}$ Le poids
- ➢ $\vec{R}$ Force exerce par l'axe (Δ)
- ➢ Le moment de $\vec{P}$: $M_{\Delta}(\vec{P}) = -mgL\sin\theta$
- ➢ Le moment de $\vec{R}$: $M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$

(La droite d'action de $\vec{R}$ est confondu avec l'axe (Δ))

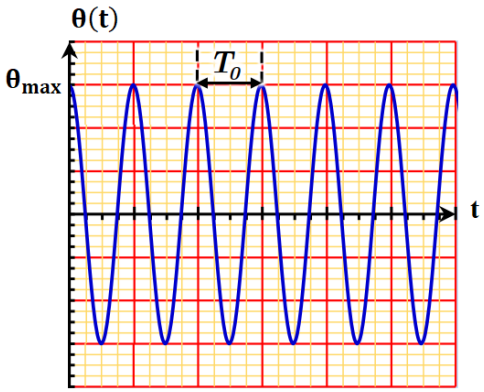
- On applique la relation fondamentale de la dynamique de rotation :

$$\mathbf{M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) = J_{\Delta}.\ddot{\theta}}$$

$$-mgL\sin\theta + 0 = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$$

- L'équation différentielle : $\ddot{\theta} + \frac{m\,g\,L}{J_{\Delta}}\sin\theta = 0$
- Pour des petites oscillations $(\mathbf{\sin\theta \sim \theta})$: $\ddot{\theta} + \frac{m\,g\,L}{J_{\Delta}}\theta = 0$
- La solution de l'équation différentielle (petites oscillations) est :

$$\mathbf{\theta(t) = \theta_m \cos(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi)} \text{ avec } \begin{cases} \theta_m : \text{Amplitude maximale} \\ T_0 : \text{la période propre} \\ \varphi : \text{la phase à l'origine des temps} \end{cases}$$



En remplaçant $\ddot{\theta}(t)$ et $\theta(t)$ dans l'équation différentielle on obtient la période propre : $\mathbf{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_{\Delta}}{mgL}}}$

2) Etude énergétique

a) Energie cinétique

L'énergie cinétique du pendule pesant est définie par : $\mathbf{E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta}\,\dot{\theta}^2}$

b) Energie potentielle E_{pp}

L'énergie potentielle d'un pendule pesant est : $\mathbf{E_{PP} = m\,g\,L(1 - \cos\theta) + Cte}$

Pour des petites oscillations on a : $\mathbf{\cos\theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2}}$ d'où : $\mathbf{E_{PP} = \frac{1}{2}\,m\,g\,L\;\theta^2 + Cte}$

c) Energie mécanique

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

$$\mathbf{E_m = E_C + E_{PP} = \frac{1}{2} J_{\Delta}\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\,g\,L\,\theta^2}$$

d) Conservation de l'énergie mécanique

En absence du frottement, l'énergie mécanique est conservée.

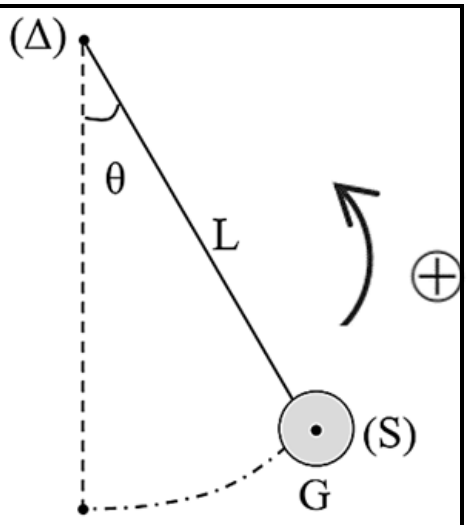
$$\mathbf{E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta}\;\dot{\theta}^2_{max} = \frac{1}{2}\,m\,g\,L\,\theta^2_{max}}$$

Remarque

On peut déterminer l'équation différentielle à partir de la conservation de l'énergie mécanique

$$\mathbf{E_m = cte \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{m\,g\,L}{J_{\Delta}}\theta = 0}$$

vii. Le pendule simple



Le pendule simple est une masse ponctuelle fixée à l'extrémité d'un fil inextensible de masse négligeable, et oscillant sous l'effet de la pesanteur.

1) Etude dynamique

- On repère les positions du solide (S) par l'abscisse angulaire $\theta(t)$
  Les forces exercées sur le système :

➢ $\vec{P}$ Le poids

➢ $\vec{R}$ Force exerce par l'axe (Δ)

➢ $M_{\Delta}(\vec{P}) = -mgL\sin\theta$

➢ $M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$ (La droite d'action de $\vec{R}$ est confondu avec (Δ))

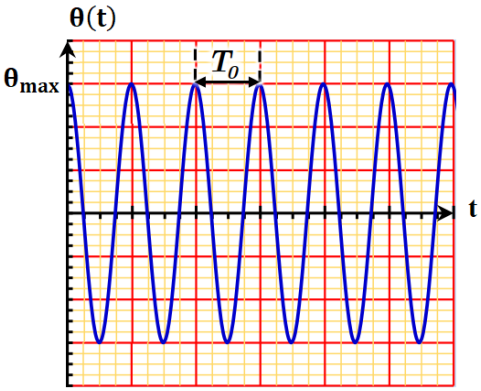
- On applique la relation fondamentale de la dynamique de rotation

$$\mathbf{M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) = J_{\Delta}.\ddot{\theta}}$$

$$(J_{\Delta} = mL^2) \qquad -m\,g\,L\sin\theta + 0 = mL^2.\ddot{\theta}$$

D'où l'équation différentielle : $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$

- Pour des petites oscillations $\sin\theta \sim \theta$: $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$



La solution de l'équation différentielle (petites oscillations) est :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right) \text{ avec } \begin{cases} \theta_m : \text{Amplitude maximale} \\ T_0 : \text{la période propre} \\ \varphi : \text{la phase à l'origine des temps} \end{cases}$$

En remplaçant $\ddot{\theta}(t)$ et $\theta(t)$ dans l'équation différentielle on obtient la période propre : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

2) Etude énergétique

a) Energie cinétique

L'énergie cinétique du pendule simple est définie par : $E_C = \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$ $\quad (J_{\Delta} = mL^2)$

b) Energie potentielle E_{PP}

L'énergie potentielle d'un pendule simple est : $E_{PP} = m\,g\,L(1 - \cos\theta) + Cte$

Pour des petites oscillations on a : $\cos\theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2}$ d'où : $E_{PP} = \frac{1}{2}\,m\,g\,L\,\theta^2 + Cte$

c) Energie mécanique

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle

$$E_m = E_C + E_{PP} = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\,g\,L\,\theta^2$$

d) Conservation de l'énergie mécanique

En absence du frottement l'énergie mécanique est conservée.

$$E_m = \frac{1}{2}\,m\,L^2\,\dot{\theta}^2_{max} = \frac{1}{2}\,m\,g\,L\,\theta^2_{max}$$

Remarque

On peut déterminer l'équation différentielle à partir de la conservation de l'énergie mécanique.

$$E_m = cte \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

Atome et mécanique de Newton

i. Loi de newton et loi de coulomb

1) Loi de newton

Deux corps ponctuels **A** et **B**, de masses $\mathbf{m_A}$ et $\mathbf{m_B}$, séparés par la distance **d**, exercent l'un sur l'autre des forces d'interactions $\overrightarrow{F_{A/B}}$ et $\overrightarrow{F_{B/A}}$ ayant :

- Même droite d'action (AB)
- Des sens opposés
- Même intensité : $\mathbf{F_{A/B} = F_{B/A} = G.\frac{m_A m_B}{d^2}}$ G : constante de gravitation universelle $\mathbf{G = 6.67.10^{-11} S.I}$

2) Loi de coulomb

Deux corps **A** et **B** de charge $\mathbf{q_A}$ et $\mathbf{q_B}$, séparés par la distance **d**, exercent l'un sur l'autre des forces électrostatiques $\overrightarrow{F_{A/B}}$ et $\overrightarrow{F_{B/A}}$ ayant :

- Même droite d'action (AB)
- Des sens opposés
- Même intensité : $\mathbf{F_{A/B} = F_{B/A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q_A q_B}{d^2}}$ $\boldsymbol{\varepsilon_0}$**:** La permittivité dans le vide $\boldsymbol{\varepsilon_0 = 9.10^9\ S.I}$

ii. Limites de la mécanique de Newton

1) Mécanique classique

La mécanique de Newton n'est pas utilisable à l'échelle atomique et moléculaire pour expliquer quelques phénomènes physique comme l'échange énergétique entre la matière et la lumière.

2) Mécanique quantique

a) Quantification de l'énergie

Lorsque un atome est excitée par rayonnement l'énergie échangée $\boldsymbol{E}$ entre la matière et le rayonnement ne peut prendre que des valeurs **définies** et **discrètes** ; on dit que cette énergie est quantifiée.

b) Le photon

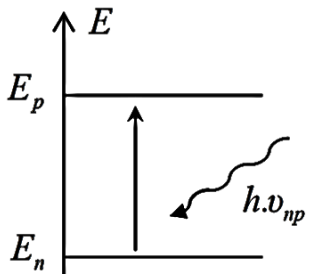
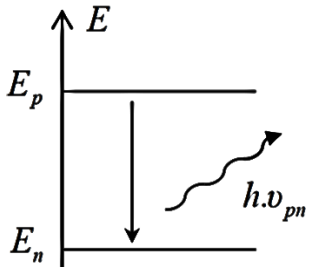
Le photon est une onde électromagnétique de fréquence $\boldsymbol{\upsilon}$ et de longueur d'onde dans le vide $\boldsymbol{\lambda}$.

L'énergie de chaque photon est : $\mathbf{E = h\,\upsilon = \frac{h\,c}{\lambda}}$ avec $\begin{cases} \text{E : Energie du photon} \\ \text{h : Constante de Planck} \\ \text{c : Célérité de la lumière dans le vide} \end{cases}$

3) Émission et absorbions d'un photon

Les atomes, les molécules et les noyaux possèdent des niveaux d'énergies quantifiées.

Lorsque ces entités échangent de l'énergie avec le milieu extérieur, elles transitent d'un niveau d'énergie $\boldsymbol{E_P}$ à un niveau d'énergie $\boldsymbol{E_n}$ ou réciproquement. $\mathbf{\Delta E = E_P - E_n = h\,\upsilon = \frac{h\,c}{\lambda}}$

Absorbation	Émission
	

Les questions qui se posent au chimiste

i. Le rôle de la chimie

La chimie a une importance dans notre vie quotidienne dans plusieurs domaines :

- **La santé**
- **L'environnement**
- **L'industrie**
- **…**

ii. Les activités de chimiste

- Création et reproduction des espèces chimiques
- Identification des espèces chimiques
- Analyse des espèces chimiques
- Séparation des espèces chimiques

iii. Les questions qui se posent au chimiste

Plusieurs questions peuvent se poser sur un chimiste parmi lesquelles on peut citer :

- La transformation d'un système chimique est-elle toujours rapide ?
- La transformation d'un système chimique est-elle toujours totale ?
- Quelle est le sens de la transformation, est-il direct ou inverse ?
- Comment le chimiste contrôle-t-il les transformations de la matière ?

Transformations rapides et transformations lentes

i. Réaction d'oxydoréduction

1) Définitions

Oxydant : est une espèce chimique capable de capter un ou plusieurs électrons (noté $\boldsymbol{Ox}$)

Réducteur : est une espèce chimique capable de céder un ou plusieurs électrons (noté $\boldsymbol{Red}$)

Oxydation : est une perte d'électrons $\boldsymbol{Red \rightleftharpoons Ox + n.e^-}$

Réduction : est un gain d'électrons $\boldsymbol{Ox + n.e^- \rightleftharpoons Red}$

2) Couple d'oxydoréduction (Ox/Red)

Le couple **Ox/Red** constitué par un oxydant et le réducteur correspondant.

On associe au couple **Ox/Red** une demi-équation d'oxydo-réduction : $\boldsymbol{Ox + n.e^- \rightleftharpoons Red}$

Pour équilibrer la demi-équation oxydo-réduction, on suit les étapes suivantes :

- Conservation des éléments autre que l'oxygène (**O**) et l'hydrogène(**H**)
- Conservation de l'élément oxygène (**O**) en ajoutant des molécules $\mathbf{H_2O}$
- Conservation de l'élément Hydrogène (**H**) en ajoutant des ions $\mathbf{H^+}$
- Conservation de la charge électrique en ajoutant des électrons $\mathbf{e^-}$

3) Équation de la réaction d'oxydo-réductions

Une réaction oxydo-réduction met en jeu deux couples : $\boldsymbol{Ox_1/Red_1}$ et $\boldsymbol{Ox_2/Red_2}$

Pour établir l'équation de la réaction on suit les étapes suivantes :

- On écrit les demi-équations oxydo-réductions :

(1) $Red_1 \rightleftharpoons Ox_1 + n_1e^-$ et (2) $Ox_2 + n_2e^- \rightleftharpoons Red_2$

- On fait la somme (1) + (2) de sorte que le nombre d'électrons échangés soit le même

$n_2(Red_1 \rightleftharpoons Ox_1 + n_1e^-)$ et $(Ox_2 + n_2e^- \rightleftharpoons Red_2)n_1$

$$\boldsymbol{n_1Ox_2 + n_2Red_1 \rightarrow n_1Red_2 + n_2Ox_1}$$

ii. Transformation rapide et transformation lente

1) Transformation rapide

Transformation se fait en une durée trop courte pour être suivie par l'œil ou par les instruments de mesures.

2) Transformation lente

Transformation peut être suivie par l'œil ou par les instruments de mesures.

3) Méthodes physiques pour suivi une transformation lente

- **Conductimétrie :** pour les milieux réactionnels contenant des ions.
- **pH-mètre** : pour les milieux réactionnels contenant des ions $\mathbf{H_3O^+}$ et $\mathbf{HO^-}$
- **Mesure de volume ou de pression** : Lorsqu'un gaz est mis en jeu.

iii. Facteurs cinétiques

Les facteurs cinétiques : grandeurs qui ont une influence sur la vitesse d'évolution d'un système chimique

L'influence de la température	L'influence des concentrations initiales
La vitesse d'évolution d'un système chimique est d'autant plus grande que sa température est plus Elevée.	La vitesse d'évolution d'un système chimique est d'autant plus grande que les concentrations en réactifs sont plus importantes.

Suivi temporel d'une transformation

i. Suivi temporel d'une transformation chimique

1) Définition

Suivi l'évolution d'une transformation chimique c'est connaître sa composition à chaque instant.

2) Méthodes de suivi l'évolution d'une transformation

Méthodes physiques	Méthode chimique
La conductimétrie La mesure de la pression au de volume La mesure du pH	Le dosage

ii. Vitesse de réaction et le temps de demi-réaction

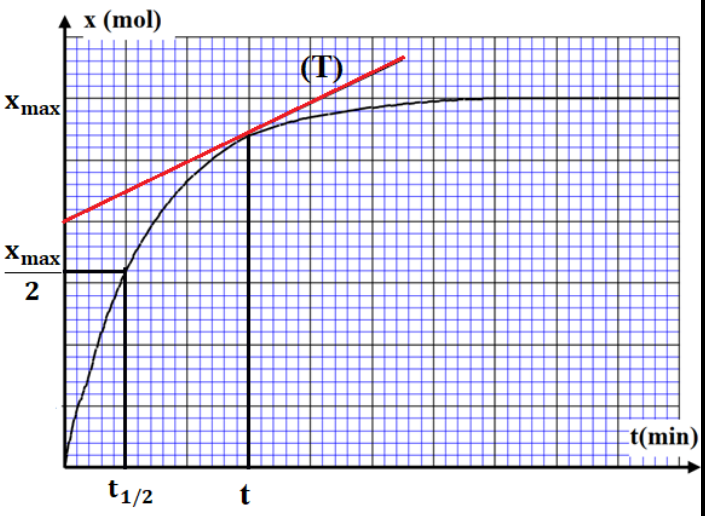
1) Vitesse volumique de réaction

La vitesse volumique de réaction v est définie par :

$$v = \frac{1}{V}.\frac{dx}{dt} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v : \text{la vitesse volumique en } (\text{mol.m}^{-3}.\text{s}^{-1}) \\ V : \text{volume total de la solution en } (\text{m}^3) \\ dx : \text{la variation de l'avancemment en (mol)} \\ dt : \text{la variation de temps en (s)} \end{cases}$$

2) Détermination graphique du v

Pour déterminer la vitesse volumique de la réaction à un instant **t**, on calcule le coefficient directeur $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ de la tangente **(T)** de la courbe $x = f(t)$ à l'instant **t** et on le divise par le volume total de la solution **V**.



3) Temps de demi-réaction

Le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ est le temps nécessaire pour que l'avancement de la réaction soit égal à la moitié de sa valeur finale $x(t_{1/2}) = \frac{x_f}{2}$

Remarque

- Si la transformation est totale $x_f = x_{max}$
- Généralement la vitesse de la réaction diminue au cours du temps car les concentrations des réactifs diminuent.

4) Autres expressions de la vitesse de la réaction

On peut exprimer aussi la vitesse de la réaction en fonction de :

Concentration d'un ion formé	Le volume du gaz formé	La pression du gaz formé	La conductivité σ
$v = \frac{1}{a}.\frac{d[ion]}{dt}$	$v = \frac{1}{a.V.V_m}.\frac{dV(gaz)}{dt}$	$v = \frac{X_{max}}{V.\Delta P_{max}}.\frac{d\Delta P}{dt}$	$v = \frac{X_{max}}{V.\sigma_{max}}.\frac{d\sigma}{dt}$

a : Le coefficient stœchiométrique de l'élément chimique suivi.

iii. Vitesse de la réaction et facteurs cinétiques

1) La température

Plus la température est élevée, plus les collisions efficaces sont élevées et plus la réaction est rapide.

2) La concentration initiale des réactifs

Plus les concentrations initiales des réactifs sont élevées, plus les collisions efficaces sont élevées et plus la réaction rapide.

Transformations chimiques qui ont lieu dans les deux sens

i. Rappels sur les acides et les bases

1) Définitions au sens de Bronsted

Acide : est une espèce chimique susceptible de céder au moins un proton $\mathbf{H^+}$

Base : est une espèce chimique susceptible de capter au moins un proton $\mathbf{H^+}$

2) Couple acide/base

- Le couple **(HA/A⁻)** est composé d'un acide **AH** et de sa base conjugue **A⁻**, possible de passer de l'acide à la base et inversement par perte au gain d'un proton $\mathbf{H^+}$
- On associe au couple **(HA/A⁻)** une demi-équation acido-basique : $\mathbf{HA \rightleftharpoons A^- + H^+}$

Remarque

Les espèces chimiques appartenant à deux couples sont appelées des ampholytes (exemple $\mathbf{H_2O}$)

3) Réactions acido-basiques

Une réaction acido-basique est une réaction qui met en jeu un transfert de proton $\mathbf{H^+}$entre les réactifs.

La réaction acido-basique met en jeu deux couples acide/base : $\mathbf{A_1H}$ /A_1^- et A_2H /$\mathbf{A_2^-}$.

- Les demi-équations acido-basiques :

$$\mathbf{A_1H} \leftrightarrows A_1^- + H^+ \qquad \text{et} \qquad \mathbf{A_2^-} + H^+ \leftrightarrows A_2H$$

- L'équation bilan de la réaction : $\mathbf{A_1H + A_2^- \rightarrow A_1^- + A_2H}$

4) Définition du pH d'une solution

Le **pH** d'une solution est défini par la relation : $\mathbf{pH = -\log[H_3O^+] \quad \Leftrightarrow \quad [H_3O^+] = 10^{-pH}}$

ii. Taux d'avancement final τ

1) Avancement final et l'avancement maximal

- L'avancement maximal $\mathbf{x_{max}}$ est l'avancement qui correspond à l'état final théorique.
- L'avancement final $\mathbf{x_f}$ est la valeur de l'avancement qui correspond à l'état final réel.

2) Taux d'avancement final τ

Le taux d'avancement final d'une réaction, noté **τ**, est donné par :

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{x_f}}{\mathbf{x_{max}}} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \text{Si } \boldsymbol{\tau} = \mathbf{1} : & \text{la réaction est totale} \\ \text{Si } \boldsymbol{\tau} < \mathbf{1} : & \text{la réaction est limitée} \end{cases}$$

3) Réaction limitée

Lorsque la réaction est limitée $\boldsymbol{\tau} < \mathbf{1}$ la réaction aura lieu dans les deux sens, l'équation de la réaction s'écrit par deux flèches : $\mathbf{a.A + b.B \rightleftharpoons c.C + d.D}$

Lorsque la réaction est limitée, l'état final du système est dans un état d'équilibre chimique.

4) Interprétation microscopique de l'état d'équilibre chimique

A l'équilibre les concentrations des réactifs et des produits restent constantes.

Au niveau microscopique la réaction s'effectuent dans les deux sens **(1)** et **(2)** avec la même vitesse .

$$\mathbf{a.A_{(aq)} + b.B_{(aq} \underset{2}{\overset{1}{\rightleftharpoons}} c.C_{(aq)} + d.D_{(aq)}}$$

Etat d'équilibre d'un système chimique

i. État d'équilibre d'un système chimique

1) Quotient de réaction Q_r

Considérons l'équation de la réaction : $\mathbf{a.A_{(aq)} + b.B_{(aq)} \underset{2}{\overset{1}{\rightleftharpoons}} c.C_{(aq)} + d.D_{(aq)}}$

Le quotient de la réaction est une grandeur qui nous renseigne sur l'évolution du système étudié :

Le quotient de la réaction $\mathbf{Q_r}$ est donné par : $\mathbf{Q_r = \frac{[C]^c.[D]^d}{[A]^a.[B]^b}}$

[X] : La concentration molaire de l'espèce chimique **X**, en (mol/L)

Remarque

Les solides et l'eau ne figurent pas dans l'expression de ce quotient.

2) La constante d'équilibre K

La constante d'équilibre **K** est le quotient de réaction à l'équilibre : $\mathbf{K = Q_{réq} = \frac{[C]^c_{éq}.[D]^d_{éq}}{[A]^a_{éq}.[B]^b_{éq}}}$

Remarque :

- La constante d'équilibre ne dépend que de la température.
- Dans le cas d'un équilibre chimique, l'avancement final est noté $\mathbf{x_{éq}}$

ii. Conductance et conductivité d'une solution

1) La conductance

La conductance d'une solution est donnée par la relation :

$$\mathbf{G = \sigma.\frac{S}{L}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma \ : \text{la conductivité de la solution en } (S.m^{-1}) \\ S \ : \text{la surface des électrodes en } (m^2) \\ L \ : \text{la distance entre les plaques en } (m) \end{cases}$$

2) La conductivité

La conductivité de la solution est égale à la somme des conductivités molaires des ions de la solution.

$$\boldsymbol{\sigma = \sum \lambda_i.[X_i]} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma \ : \text{la conductivité en } (S.m^{-1}) \\ \lambda_i : \text{la conductivité molaire ionique en} (S.m^2 mol^{-1}) \\ [X_i] : \text{la concentration de l'ion } X_i \text{ en} (mol.m^{-3}) \end{cases}$$

3) Détermination de la constante d'équilibre par la mesure de la conductivité

Exemple : considérons une solution de volume **V** d'acide éthanoïque CH_3COOH de concentration **C**

L'équation de la réaction de l'acide éthanoïque avec l'eau : $\mathbf{CH_3COOH + H_2O \leftrightharpoons H_3O^+ + CH_3COO^-}$

Équation de la réaction		CH_3COOH	+	H_2O	$\leftrightharpoons$	H_3O^+	+ CH_3COO^-
État du système	Avancement	Quantités de matière en (mol)					
État initial	0	C.V	En excès			0	0
État intermédiaire	x	$C.V - x$				x	x
État final	x_{max}	$C.V - x_{max}$				x_{max}	x_{max}
	$x_{éq}$	$C.V - x_{éq}$				$x_{éq}$	$x_{éq}$

- L'expression de la conductivité : $\boldsymbol{\sigma_{éq} = \lambda_{H_3O^+}[H_3O^+]_{éq} + \lambda_{CH_3COO^-}[CH_3COO^-]_{éq}}$
- D'après le tableau d'avancement : $\boldsymbol{[H_3O^+]_{éq} = [CH_3COO^-]_{éq}}$ et $\boldsymbol{[CH_3COOH]_{éq} = C - [H_3O^+]_{éq}}$
- Connaissant la conductivité à l'équilibre on peut calculer la valeur de $\boldsymbol{[H_3O^+]_{éq}}$:

$$\boldsymbol{[H_3O^+]_{éq} = \frac{\sigma_{éq}}{(\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{CH_3COO^-})}}$$

- La constante d'équilibre est donnée par : $\boldsymbol{K = \frac{[H_3O^+]^2_{éq}}{C - [H_3O^+]_{éq}}}$

iii. Facteurs influençant sur le taux d'avancement

1) Influence de la constante d'équilibre

Exemple

Considérons la réaction de la transformation entre l'acide méthanoïque et l'eau selon l'équation de la réaction suivante : $\mathbf{HCOOH + H_2O \leftrightharpoons H_3O^+ + HCOO^-}$

Le tableau d'avancement :

Équation de la réaction		$HCOOH$	$+$	H_2O	$\leftrightharpoons$	H_3O^+	$+$ $HCOO^-$
État du système	Avancement	Quantités de matière en (mol)					
État initial	0	C.V	En excès			0	0
État intermédiaire	x	$C.V - x$				x	x
État d'équilibre	x_{max}	$C.V - x_{max}$				x_{max}	x_{max}
	$x_{éq}$	$C.V - x_{éq}$				$x_{éq}$	$x_{éq}$

- L'avancement maximal de la réaction : $\mathbf{x_{max} = C.V}$
- Le taux d'avancement $\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{x_{éq}}}{\mathbf{C.V}}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x_{éq} = \tau.C.V}$
- D'après le tableau d'avancement : $\mathbf{[H_3O^+]_{éq} = [HCOO^-]_{éq} = \frac{x_{éq}}{V}}$ et $\mathbf{[HCOOH]_{éq} = \frac{C.V - x_{éq}}{V}}$

On a : $\mathbf{K = \frac{[H_3O^+]_{éq}.[HCOO^-]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}} = \frac{x_{éq}^2}{(C.V - x_{éq}).V}}$ et $\mathbf{x_{éq} = \tau.C.V}$

La constant d'équilibre en fonction du taux de l'avancement : $K = \frac{\mathbf{C.\tau^2}}{\mathbf{(1-\tau)}}$

Conclusion

Plus la constante d'équilibre **K** est grande plus le taux d'avancement **τ** est élevé.

2) Influence de l'état initial d'un système

Plus la concentration de la solution est faible plus le taux d'avancement **τ** est élevé.

Exemple

Acide éthanoïque de concentration initiale $C_i(mol/L)$	5.10^{-2}	5.10^{-3}	5.10^{-4}
Taux d'avancement **τ**	0.02	0.06	0.17

Transformation acido-basique en solution aqueuse

i. Le produit ionique de l'eau

1) Autoprotolyse de l'eau

L'autoprotolyse de l'eau est une réaction acido-basique entre l'acide $\mathbf{H_2O}$ et la base $\mathbf{H_2O}$

Les deux couples mis en jeu sont : $\mathbf{H_3O^+}$ /$\mathbf{H_2O}$ et $\mathbf{H_2O}$ /$\mathbf{HO^-}$

$$2H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + HO^-$$

2) Produit ionique de l'eau

Le produit ionique de l'eau est défini par : $K_e = [H_3O^+].[HO^-]$ À 25°C, $K_e = 10^{-14}$

Remarque

On utilise souvent le $\mathbf{pK_e}$ défini par : $pK_e = -\log K_e \quad \Leftrightarrow \quad K_e = 10^{-pK_e}$

3) Solution neutre, acide, basique

- Une solution est neutre si : $[H_3O^+] = [HO^-] \Leftrightarrow pH = \frac{pK_e}{2}$ à 25°C on a $pH = 7$
- Une solution est acide si : $[H_3O^+] > [HO^-] \Leftrightarrow pH < \frac{pK_e}{2}$ à 25°C on a $pH < 7$
- Une solution est basique si : $[H_3O^+] < [HO^-] \Leftrightarrow pH > \frac{pK_e}{2}$ à 25°C on a $pH > 7$

ii. La constante d'acidité K_A d'un couple acide/base

1) Définition

L'acide **AH** réagit avec l'eau selon l'équation : $AH + H_2O \leftrightarrows H_3O^+ + A^-$

La constante d'acidité K_A est la constante d'équilibre associée à l'équation de la réaction d'un acide avec l'eau

La constante d'acidité K_A associe au couple AH/A^- est : $K_A = \frac{[H_3O^+].[A^-]}{[AH]}$

$$pK_A = -\log K_A \quad \Leftrightarrow \quad K_A = 10^{-pK_A}$$

2) La relation entre pK_A et pH

Pour tout couple acide/base AH/A^- , on a : $K_A = \frac{[H_3O^+].[A^-]}{[AH]}$

$$\log K_A = \log[H_3O^+] + \log\frac{[A^-]}{[AH]} \quad \Leftrightarrow \quad -\log[H_3O^+] = -\log K_A + \log\frac{[A^-]}{[AH]}$$

$$pH = pK_A + \log\frac{[A^-]}{[AH]}$$

iii. Constante d'équilibre associée à une réaction acido-basique

Soit la réaction acido-basique entre l'acide A_1H du couple A_1H/A_1^- et la base A_2^- du couple A_2H/A_2^-:

$$A_1H + A_2^- \leftrightarrows A_1^- + A_2H$$

La constante d'équilibre **K** de la réaction est : $K = \frac{[A_1^-].[A_2H]}{[A_1H].[A_2^-]} \quad \Leftrightarrow \quad K = \frac{K_{A1}}{K_{A2}} = 10^{pK_{A2}-pK_{A1}}$

Remarque

Une transformation chimique peut être considérée totale si : $K > 10^4$.

iv. Comparer le comportement d'acides et de bases en solution

1) Comportement des acides dans une solution

Pour une même concentration, un acide A_1 est plus fort qu'un acide A_2, si le taux d'avancement final de sa réaction avec l'eau est plus grand $\tau_1 > \tau_2$ ($K_{A1} > K_{A2}$ et $pK_{A1} < pK_{A2}$)

2) Comportement des bases dans une solution

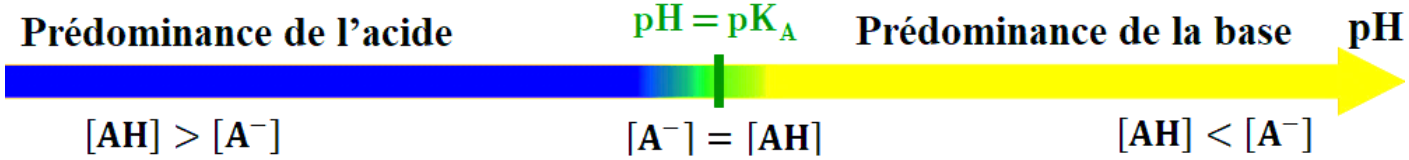
Pour une même concentration, une base B_1 est plus forte qu'une base B_2, si le taux d'avancement final de sa réaction avec l'eau est plus grand $\tau_1 > \tau_2$ ($K_{A1} < K_{A2}$ et $pK_{A1} > pK_{A2}$)

v. Diagramme de prédominance et de distribution

1) Diagramme de prédominance

Pour un couple acide-base AH/A^- dans une solution aqueuse on a : $pH = pK_A + \log\frac{[A^-]}{[AH]}$

- Si $pH = pK_A \Leftrightarrow [A^-] = [AH]$ pas de prédominance
- Si $pH < pK_A \Leftrightarrow [A^-] < [AH]$ prédominance de l'acide
- Si $pH > pK_A \Leftrightarrow [A^-] > [AH]$ prédominance de la base

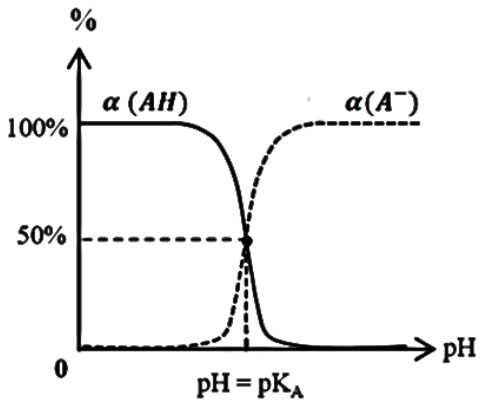


2) Diagramme de distribution

On considère une solution aqueuse, contenant un acide **AH** et sa base conjuguée A^-, la figure ci-contre représente le diagramme de distribution du couple AH/A^-

$\alpha\ (AH)$: Le pourcentage d'acide **AH** dans la solution.

$\alpha(A^-)$: Le pourcentage de la base A^- dans la solution.



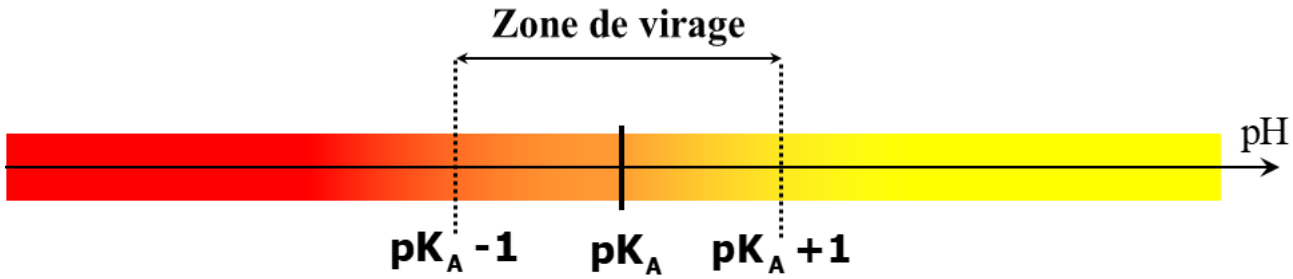
vi. Indicateurs colorés

1) Définition

Un indicateur coloré est un couple acide/base noté $HIn/\ In^-$ dont la forme basique et la forme acide ont des couleurs différentes.

2) Zone de virage

La zone $pK_A - 1 < pH < pK_A + 1$ appelée zone de virage de l'indicateur coloré.



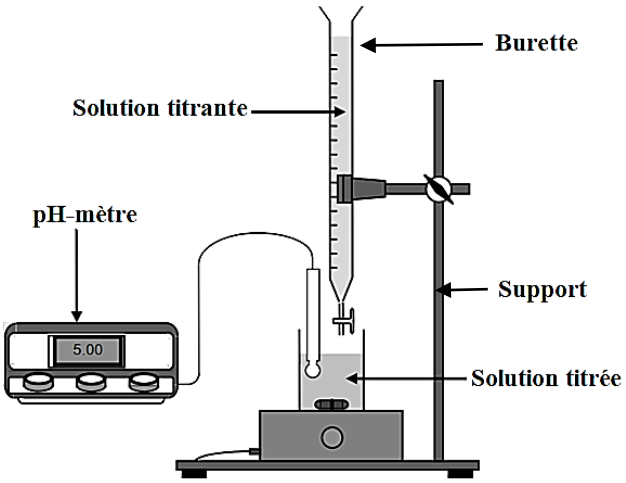
Remarque

L'indicateur coloré convenable pour réaliser un titrage colorimétrique est l'indicateur coloré dont sa zone de virage contient la valeur de **pH** à l'équivalence pH_E

vii. Dosage acido-basiques

1) Définition

- Doser une espèce chimique en solution, c'est déterminer sa concentration molaire dans la solution.
- La réaction de dosage est **rapide**, **totale** et **unique**



2) Dosage par mesure de pH

Considérons l'équation de la réaction de dosage suivante :

$$\mathbf{A + B \rightarrow C + D}$$

A est le réactif titré de concentration $\mathbf{C_A}$ et de volume $\mathbf{V_A}$

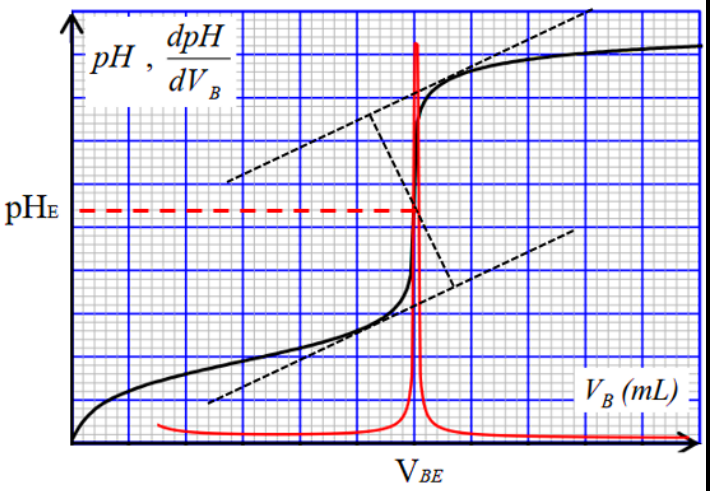
et **B** est le réactif titrant de concentration inconnue $\mathbf{C_B}$

- Au cours du dosage on mesure la valeur du **pH** pour chaque valeur du volume $\mathbf{V_B}$ ajouté et on trace la courbe : $\mathbf{pH} = f(V_B)$
- A l'équivalence on a : $\mathbf{C_A.V_A = C_B.V_{BE}}$

3) Détermination $(\mathbf{pH_E}, \mathbf{V_{BE}})$

a) Méthode des tangentes

On trace les deux tangentes aux courbes parallèles entre elles et on trace la perpendiculaire commune à ces deux droites parallèles puis on construit la médiatrice du segment obtenu (voir figure)



b) Méthode de la courbe dérivée

La courbe $\frac{\mathbf{dpH}}{\mathbf{dV_B}} = \mathbf{f(V_B)}$ permet de déterminer $\mathbf{V_{BE}}$ (voir figure)

4) Taux d'avancement de réaction de titrage (Exemple)

Dans un bécher, on verse un volume $\mathbf{V_A = 20mL}$ de solution d'acide éthanoïque de concentration $\mathbf{C_A = 0.01mol.L^{-1}}$ puis on y ajoute le volume $\mathbf{V_B = 5mL}$ $(\mathbf{V_B < V_{BE}})$ de solution de soude ($\mathbf{Na^+; HO^-}$) de concentration $\mathbf{C_B = 0.02mol.L^{-1}}$. La mesure du **pH** a donné la valeur : **pH=4.8,** on s'intéresse à déterminer le taux d'avancement de la réaction du titrage lorsque on ajoute le volume $\mathbf{V_B}$

- L'équation de la réaction de titrage : $\mathbf{CH_3COOH + HO^- \longrightarrow CH_3COO^- + H_2O}$

Équation de la réaction		CH_3COOH	$+ \quad HO^-$	$\longrightarrow$	$CH_3COO^- +$	H_2O
État du système	Avancement	Quantités de matière en (mol)				
État initial	0	$C_A.V_A$	$C_B.V_B$		0	En excès
État final	x_{max}	$C_A.V_A - x_{max}$	$C_B.V_B - x_{max}$		x_{max}	
	x_f	$C_A.V_A - x_f$	$C_B.V_B - x_f$		x_f	

- Puisque $\mathbf{V_B < V_{BE}}$ donc le réactif limitant est $\mathbf{HO^-}$ et l'avancement maximal : $\mathbf{x_{max} = C_B.V_B}$
- D'après le tableau d'avancement $n_f(HO^-) = C_B.V_B - x_f$

D'où $x_f = C_B.V_B - n_f(HO^-) = C_B.V_B - [HO^-]_f.(V_A + V_B)$

On a $K_e = [H_3O^+].[HO^-] \Leftrightarrow [HO^-]_f = \frac{K_e}{[H_3O^+]_f} = 10^{pH-pKe} \Leftrightarrow \mathbf{x_f = C_B.V_B - 10^{pH-pKe}(V_A + V_B)}$

- En fin : $\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{C_B.V_B - 10^{pH-pKe}(V_A+V_B)}}{\mathbf{C_B.V_B}}$ A.N : $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{1}$ donc la réaction de dosage acido-basique est totale.

Evolution spontané d'un système chimique

i. Evolution spontanée d'un système chimique

1) Quotient de réaction Q_r

Considérons l'équation de la réaction suivante : $\mathbf{a.A_{(aq)} + b.B_{(aq)} \underset{2}{\overset{1}{\rightleftharpoons}} c.C_{(aq)} + d.D_{(aq)}}$

Le quotient de la réaction est une grandeur qui nous renseigne sur l'évolution du système étudié :

Le quotient de la réaction $\mathbf{Q_r}$ est donné par : $\mathbf{Q_r = \frac{[C]^c.[D]^d}{[A]^a.[B]^b}}$

2) Constante d'équilibre

$$\mathbf{K = Q_{réq} = \frac{[C]^c_{éq}.[D]^d_{éq}}{[A]^a_{éq}.[B]^b_{éq}}}$$

Exemple d'une réaction acidobasique	Exemple d'une réaction d'oxydoréduction
$CH_3COOH_{(aq)} + HO^-{}_{(aq)} \leftrightarrows CH_3COO^-{}_{(aq)} + H_2O_{(l)}$ $\mathbf{Q_r = \frac{[CH_3COO^-]}{[CH_3COOH].[HO^-]}}$	$Cu^{2+}{}_{(aq)} + 2\,Br^-{}_{(aq)} \leftrightarrows Cu_{(s)} + Br_{2(aq)}$ $\mathbf{Q_r = \frac{[Br_2]}{[Cu^{2+}].[Br^-]^2}}$

3) Critère d'évolution d'un système

Pour prévoir le sens d'évolution d'un système chimique on calcule $\mathbf{Q_{r,i}}$ le quotient initial de la réaction et on le compare avec la constante d'équilibre de la réaction.

Soit l'équation de la réaction : $\mathbf{a.A_{(aq)} + b.B_{(aq)} \underset{2}{\overset{1}{\rightleftharpoons}} c.C_{(aq)} + d.D_{(aq)}}$

Le quotient de la réaction : $\mathbf{Q_{r,i} = \frac{[C]^c_i.[D]^d_i}{[A]^a_i.[B]^b_i}}$

- Si $\mathbf{Q_r < K}$ la réaction s'effectue dans le sens direct (sens 1)
- Si $\mathbf{Q_r > K}$ la réaction s'effectue dans le sens inverse (sens 2)
- Si $\mathbf{Q_r = K}$ le système est en équilibre

Transformation spontanée dans les piles

i. Transformations spontanés dans les piles

1) Transfert spontané d'électrons entre des espèces chimiques

Lorsque on mélange deux espèces chimique appartenant à deux couples (**Ox/Red**), il y a transfert spontanée d'électron entre l'oxydant d'un couple vers le réducteur de l'autre.

2) Constitution d'une pile

- La pile est un dipôle qui transforme l'énergie chimique en énergie électrique.
- La pile est composée de deux compartiments liés par un pont salin :

1^{ér} compartiment	Le pont salin	2^{éme} compartiment
Composé d'un métal M_1 plongé dans une solution contient les ions M_1^{n+}	Constitue d'une solution électrolytique.	Composé d'un métal M_2 plongé dans une solution contient les ions M_2^{m+}

Remarque

Le rôle du pont salin est d'**assuré la neutralité électrique** et de **garantir le passage du courant électrique**

ii. Fonctionnement d'une pile

1) Principe de fonctionnement

Les deux couples qui interviennent au cours de fonctionnement de la pile sont : M_1^{n+}/M_1 et M_2^{m+}/M_2

⊗ M_1 : est l'électrode **négative** de la pile appelé **anode,** où il y l'**oxydation** :

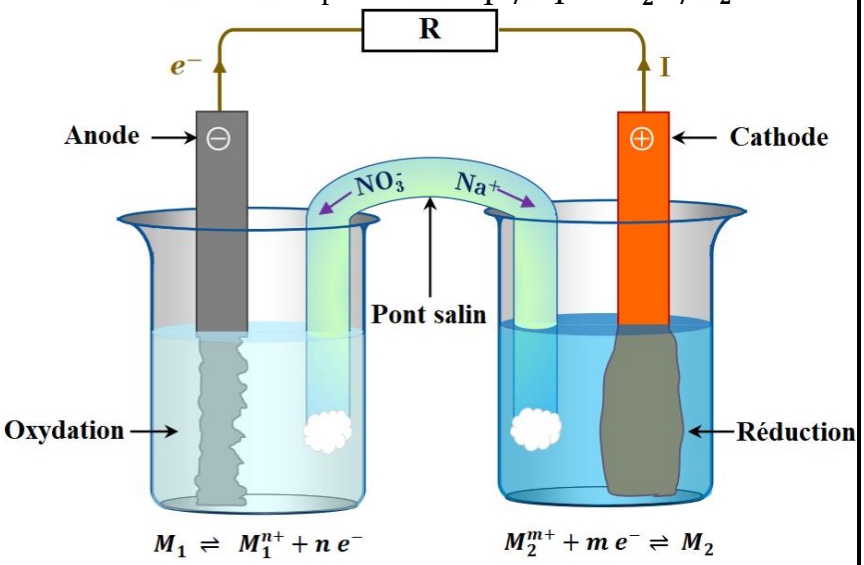
$$M_1 \rightleftharpoons M_1^{n+} + n\,e^-$$

⊗ M_2 : est l'électrode **positive** de la pile appelé **cathode** où il y a **réduction** :

$$M_2^{m+} + m\,e^- \rightleftharpoons M_2$$

Au cours de fonctionnement de la pile, il se produit une réaction d'oxydoréduction :

$$n.M_2^{m+} + m.M_1 \rightarrow n.M_2 + m.M_1^{n+}$$



2) Le schéma conventionnel de la pile

Le schéma conventionnel de la pile est : $\ominus\, M_1/M_1^{n+} \;//\; M_2^{m+}/M_2 \,\oplus$

iii. Caractéristiques d'une pile

1) Force électromotrice d'une pile

La pile est un dipôle actif caractérisé par sa force électromotrice **E** (se mesure à l'aide d'un voltmètre)

2) Evolution spontané d'une pile

- Le système évolue dans le sens direct, lorsque $Q_r < K$
- Lorsque le système est en équilibre, $Q_{ri} = K$ la pile est usée (déchargée) $I = 0\ A$

3) Quantité d'électricité débitée par une pile

La quantité d'électricité débitée par une pile débitant un courant d'intensité constante **I** pendant une durée **Δt** est donnée par : $Q = I.\Delta t = n(e^-).F$ avec $\begin{cases} n(e^-) : \text{la quantité de matière d'électrons} \\ F = 9{,}65.10^4\ C.mol^{-1} : \text{La constante de Faraday} \end{cases}$

4) Quantité d'électricité maximale débitée par une pile

La quantité d'électricité maximale Q_{max} débitée par une pile est : $Q_{max} = I.\Delta t_{max} = n(e^-)_{max}.F$

Δt_{max} : La durée maximale du fonctionnement de la pile (durée de vie de la pile).

Exemples de transformations forcées

i. Transformation forcées

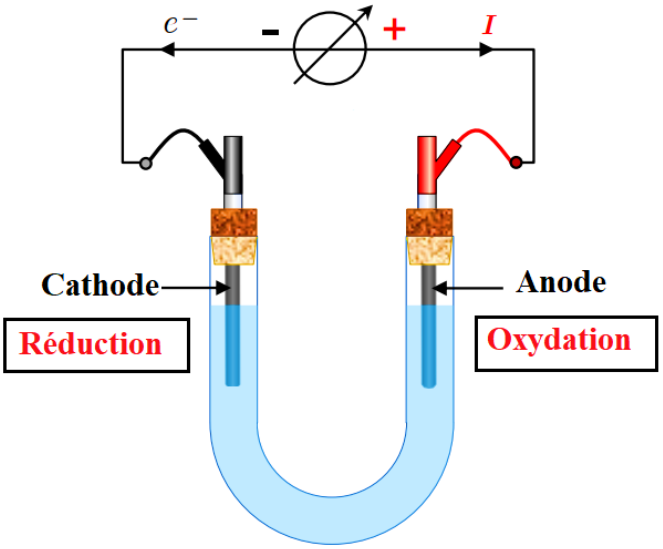
1) Définition

Une transformation forcée est une transformation qui se déroule dans le sens opposée à l'évolution spontanée (grâce à un générateur qui imposé un courant électrique dans le sens inverse).

ii. L'électrolyse

1) Principe

- L'électrolyse est une transformation forcée dû au courant électrique imposé par un générateur.
- Le générateur impose un sens inverse au sens d'évolution spontanée du système.



2) Fonctionnement de l'électrolyseur

Dans une électrolyse :

- L'électrode reliée au pôle – du générateur électrique est le siège d'une **réduction** ; il s'agit de **la cathode**
- L'électrode reliée au pôle + du générateur électrique est le siège d'une **oxydation** ; il s'agit de **l'anode**

3) Quantité d'électricité-bilan de matière

Lorsque le générateur débite un courant d'intensité **I** pendant la durée **Δt**, le système est traversé par la quantité d'électricité **Q** donnée par :

$$\mathbf{Q = I.\Delta t = n(e^-).F} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n(e^-)\text{: La quantité de matière d'électrons} \\ F = 9{,}65.10^4\ C.mol^{-1}\text{: La constante de faraday} \end{cases}$$

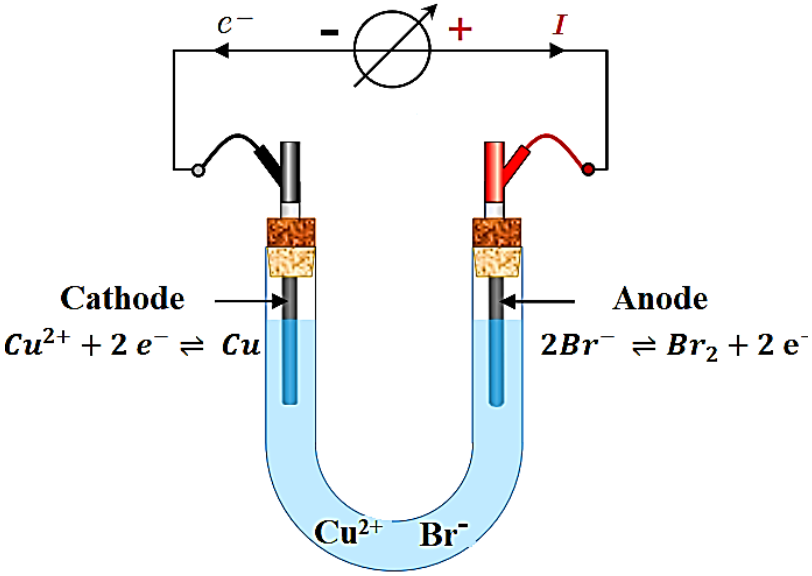
4) Quelques applications de l'électrolyse

- Préparation de métaux (le zinc, l'aluminium, le cuivre)
- Protection des objets
- Les accumulateurs

iii. Exemple d'électrolyse

Dans un tube en **U** on introduit une solution de bromure de cuivre $(Cu^{2+}, 2\ Br^-)$

Deux électrodes en graphite plongées dans la solution et reliées chacune à l'une des bornes d'un générateur (figure ci-contre)



- Au niveau de **l'anode** (électrode relié au pôle (+) du générateur) se produit une réaction **d'oxydation** :

$$2Br^- \rightleftharpoons Br_2 + 2\ e^-$$

- Au niveau de **la cathode** (électrode relié au pôle (−) du générateur) se produit une réaction de **réduction** :

$$Cu^{2+} + 2\ e^- \rightleftharpoons Cu$$

- L'équation bilan de l'électrolyse : $Cu^{2+} + 2\ Br^- \rightarrow Cu + Br_2$

Les réactions d'estérification et d'hydrolyse

i. Nomenclature et groupes fonctionnels

1) Les alcools

Un alcool $\boldsymbol{R-OH}$ contient le groupe caractéristique hydroxyle $\boldsymbol{-OH}$ lié à un groupe alkyle $\boldsymbol{R-}$

Nomenclature	Exemple
On nomme les alcools en ajoutant au nom de l'alcane correspondant le suffixe "**ol**" précédée de son indice de la position du carbone fonctionnel dans la chaîne principale et qui porte le numéro le plus petit.	$CH_3-CH_2-\boldsymbol{OH}$ éthan**ol**

2) Les acides carboxyliques

Les acides carboxyliques $\boldsymbol{R-COOH}$ contiennent le groupe carboxylique ($\boldsymbol{-COOH}$).

Nomenclature	Exemple
On nomme les acides carboxyliques en ajoutant au nom de l'alcane correspondant le suffixe "**oïque**" précédée par le terme "**acide**"	$CH_3-CH_2-\boldsymbol{C}\begin{matrix}\diagup \boldsymbol{OH}\\ \diagdown\!\!\diagdown \boldsymbol{O}\end{matrix}$ **Acide** éthan**oïque**

3) Les esters

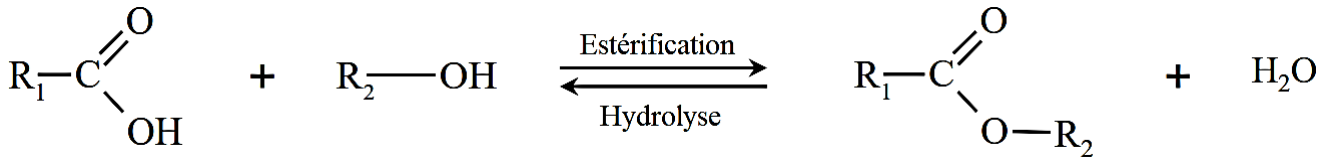
Les esters possèdent un groupe caractéristique ester : $\boldsymbol{R-COOR'}$

Nomenclature	Exemple
La chaîne carbonée $\boldsymbol{R-C}$ dérive d'un nom de l'acide carboxylique correspondant, la terminaison "**oïque**" est remplacée par "**oate**" La chaîne carbonée **R'** liée à l'atome (**O**), prend la terminaison "**yle**"	$CH_3-CH_2-\boldsymbol{C}\begin{matrix}\diagup \boldsymbol{OH}\\ \diagdown\!\!\diagdown \boldsymbol{O}-CH_3\end{matrix}$ éthan**oate** de méth**yle**

ii. Réactions d'estérification et d'hydrolyse d'un ester

1) Equation de la réaction

La réaction **d'estérification** et **d'hydrolyse** sont inverse l'une de l'autre et ont lieu simultanément.



Remarque : L'estérification et l'hydrolyse sont des réactions **lentes** et **limitées**

2) Etat d'équilibre estérification-hydrolyse

- À d'équilibre chimique la vitesse d'estérification est égale à la vitesse d'hydrolyse.
- L'équilibre est caractérisé par la constante d'équilibre **K** : $\mathbf{K = Q_{réq} = \frac{[ester]_{éq}.[eau]_{éq}}{[acide]_{éq}.[alcool]_{éq}}}$

Si $\boldsymbol{Q_r} < \boldsymbol{K}$, le système évolue dans le sens direct, sens d'estérification.

Si $\boldsymbol{Q_r} > \boldsymbol{K}$; le système évolue dans le sens inverse, sens d'hydrolyse de l'ester.

3) Rendement d'une transformation chimique

Le rendement **r** d'une transformation est égal au quotient de $\mathbf{n_{exp}}$ la quantité de matière expérimentalement obtenu, par $\mathbf{n_{max}}$ la quantité de matière maximale attendu : $\mathbf{r = \frac{n_{exp}}{n_{max}}}$

4) Facteurs influencent sur la vitesse de la réaction

- L'élévation de la **température** permet d'atteindre plus rapidement l'équilibre d'estérification -hydrolyse.
- **Un catalyseur** permet d'augmenter la vitesse de réaction sans modifie l'état final.

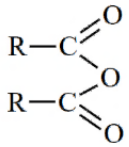
5) Facteur influencent sur le rendement de la réaction

- Le rendement de l'estérification est d'autant plus important que l'un des réactifs soit en excès.
- L'élimination de l'ester et/ou de l'eau lors de leur formation permet d'améliorer le rendement.

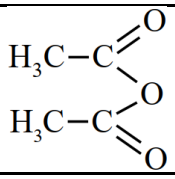
Contrôle de l'évolution de systèmes chimiques

i. Estérification par un anhydride d'acide

1) Anhydrides d'acides

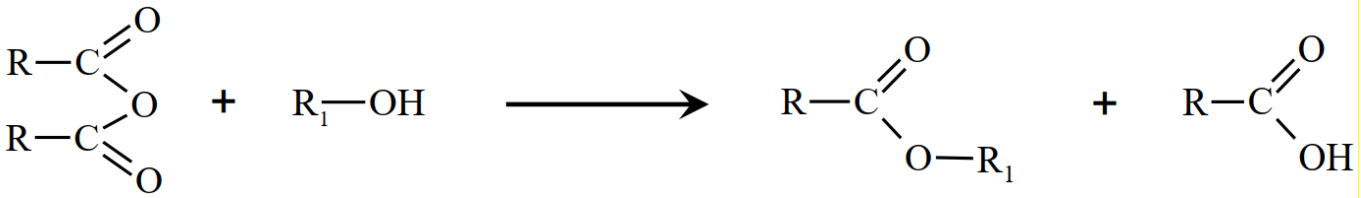


Un anhydride d'acide est un composé organique qui possède le groupe caractéristique :

Nomenclature	Exemple
Un anhydride se nomme en remplaçant le mot "**acide**" par le mot "**anhydride**" dans le nom de l'acide carboxylique correspondant.	**anhydride** éthan**oïque** 

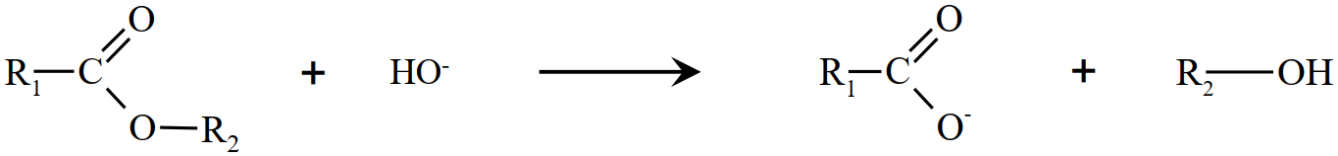
2) Estérification par un anhydride d'acide

L'estérification par un anhydride d'acide est une transformation entre un anhydride d'acide et l'alcool**,** il se forme l'ester et l'acide carboxylique, l'hydrolyse de l'ester n'est pas possible car le milieu est anhydre.



3) Hydrolyse basique d'un ester (saponification)

L'hydrolyse basique d'un ester R_1COOR_2 (ou la saponification d'un ester) est une réaction de cet ester avec l'ion hydroxyde HO^-en solution concentrée qui donne un ion carboxylate R_1COO^-et un alcool $R_2 - OH$

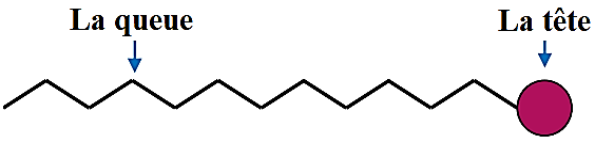


- L'hydrolyse basique d'un ester est une transformation **totale** et **rapide**.
- L'estérification ne peut pas se produire.

4) Propriétés des savons

Le savon est un mélange d'ion $RCOO^-$ et d'ion Na^+ (ou K^+)

L'ion carboxylate d'un savon est composé d'une longue chaîne carbonée **R** appelée « **queue** » de l'ion, et d'un groupe $-COO^-$ polarisé appelé « **tête** »



- « **La tête** » est soluble dans l'eau : $-COO^-$ est appelée la partie **hydrophile**
- « **la queue** » La longue chaine **R** insoluble dans l'eau : **R** est appelée la partie **hydrophobe**

ii. Contrôle de l'évolution d'un système chimique par catalyse

1) Définition

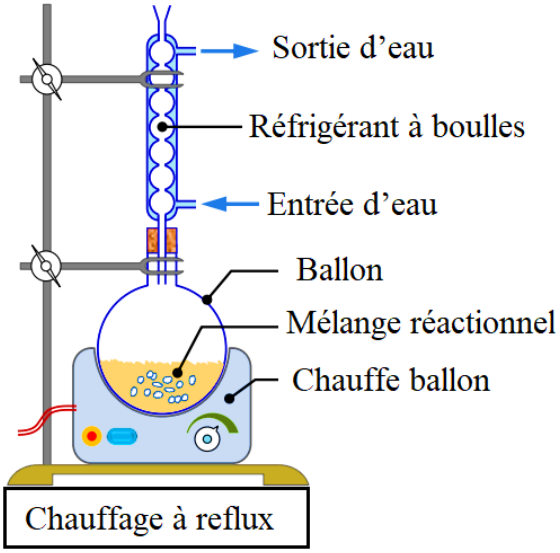
Un catalyseur est une substance qui accélère une réaction chimique sans modifier l'état final.

2) Types de catalyses

Catalyse homogène	Catalyse hétérogène	Catalyse enzymatique
Le catalyseur et les réactifs sont dans la même phase.	Les réactifs et le catalyseur ne sont pas dans la même phase.	Lorsque le catalyseur est une enzyme.

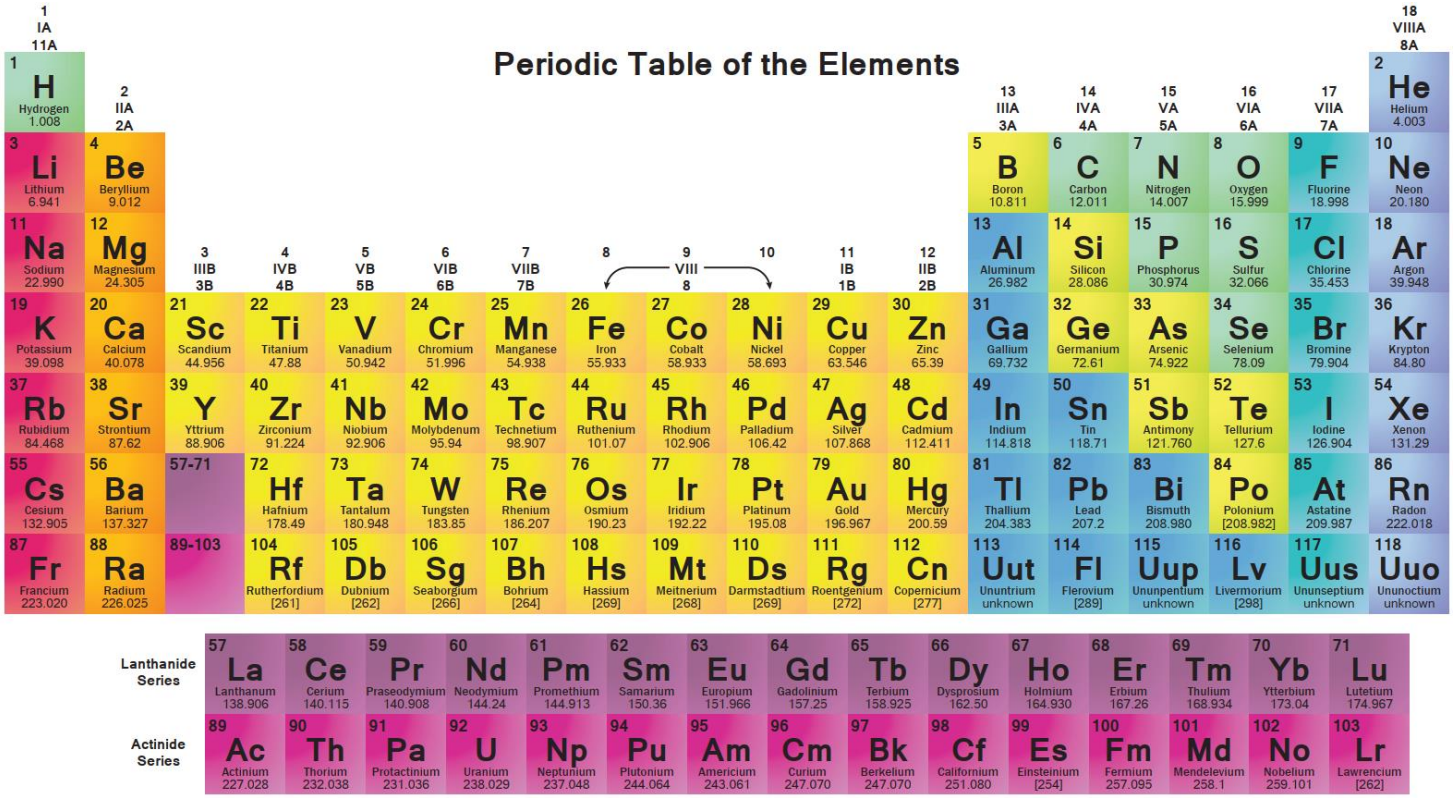
3) Chauffage à reflux

- Le montage expérimental utilisé lors d'une réaction d'estérification, hydrolyse et de saponification est le chauffage à reflux.
- L'intérêt du chauffage à reflux est d'accélérer la réaction et éviter les pertes de la matière.
- On ajoute au mélange réactionnel des **pierres ponce** pour stabiliser la température du milieu réactionnel.



Fin du cours...bonne chance !

لا تنسونا من صالح دعائكم



Prof: BABA EL HOUSSINE

E-mail: babaelhoussine1@gmail.com