

**Deuxième bac sciences PC
/SVT /ST**

Série corrigée 4 : Limite d'une suite

Deuxième bac sciences PC /SVT /ST

Plan de chapitre 4 : Limite d'une suite

- **Cours détaillé**
- **Résumé de cours**
- **Série d'exercices**
- **Correction détaillée des exercices**

Série 4 :

**Limite d'une
suite**

**Deuxième bac science
expérimentale**

Exercice 01

Déterminer les limites suivantes :

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n}$; c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n}$
 d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5+6\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$; f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - 3^n$

Exercice 02

Soit la suite (u_n) tel que $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_0 = 0$ avec $n \in \mathbb{N}$

- 1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq n$
 2) Déduire la limite de (u_n)

Exercice 03

Soit la suite (u_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

- 1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq 3$
 2) Etudier la monotonie de (u_n) et déduire qu'elle convergente
 3) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq 2$
 4) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $v_n = u_n - 3$
 a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique
 b) Exprimer v_n en fonction de n
 c) Calculer u_n en fonction de n puis préciser la limite de (u_n)
 5) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} + v_n$
 Calculer S_n en fonction de n puis préciser la limite de (S_n)
 6) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n$
 Calculer T_n en fonction de n puis préciser la limite de (T_n)

Exercice 04

Soit (U_n) une suite tel que : $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = \frac{3U_n}{21+U_n}$ et $U_0 = 1$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n > 0$
 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} ; U_{n+1} \leq \frac{1}{7}U_n$
 3) En déduire la monotonie de (U_n)
 4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < U_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ et calculer la limite de (U_n)
 5) On pose : $\forall n \in \mathbb{N} : V_n = \sqrt{9 - 2U_n}$, calculer la limite de (V_n)

Exercice 05

(u_n) une suite tel que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n+5}$ et $u_0 = 1$

- 1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > -2$
 2) Etudier la monotonie de (u_n) et déduire qu'elle convergente
 3) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $v_n = \frac{1}{u_n+2}$
 a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique
 b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n et déterminer $\lim u_n$

Exercice 06

(u_n) la suite définie par: $u_0 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{8(u_n-1)}{u_n+2}$

- 1) Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2 < u_n < 4$.
 2) Etudier la monotonie de (u_n) et déduire qu'elle convergente
 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose: $v_n = \frac{u_n-4}{u_n-2}$
 a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique
 b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
 4) a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$
 b) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$
 c) Déduire une autre fois $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 07

f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

- 1) a) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : f(x) \leq x$.
 b) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
 2) Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < 1$.
 b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
 c) Déduire que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite

Exercice 08

(u_n) la suite tel que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ et $u_0 = 1$.

- 1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq 3$
 2) Montrer que (u_n) est croissante
 3) Déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite

Corrigé de série 4

Limite d'une suite

Deuxième bac science expérimentale

:

Série 04 : Limite d'une suite numérique

2bac BIOF

Exercice 01

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n}$; c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n}$
 d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5+6\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$; f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - 3^n$

Exercice 02

Soit la suite (u_n) tel que $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_0 = 0$ avec $n \in \mathbb{N}$ 1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq n$ 2) Dédurre la limite de (u_n)

Exercice 03

Soit la suite (u_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.1) Montrer que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq 3$ 2) Etudier la monotonie de (u_n) et déduire qu'elle convergente3) En déduire que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq 2$ 4) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $v_n = u_n - 3$ a) Montrer que (v_n) est une suite géométriqueb) Exprimer v_n en fonction de n c) Calculer u_n en fonction de n puis préciser la limite de (u_n) 5) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} + v_n$ Calculer S_n en fonction de n puis préciser la limite de (S_n) 6) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n$ Calculer T_n en fonction de n puis préciser la limite de (T_n)

Exercice 04

Soit (U_n) une suite tel que : $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = \frac{3U_n}{21+U_n}$ et $U_0 = 1$ 1) Montrer que ; $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n > 0$ 2) Montrer que ; $\forall n \in \mathbb{N} ; U_{n+1} \leq \frac{1}{7}U_n$ 3) En déduire la monotonie de (U_n) 4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < U_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ et calculer la limite de (U_n) 5) On pose : $\forall n \in \mathbb{N} : V_n = \sqrt{9 - 2U_n}$, calculer la limite de (V_n)

Exercice 05

 (u_n) une suite tel que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n+5}$ et $u_0 = 1$ 1) Montrer que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > -2$ 2) Etudier la monotonie de (u_n) et déduire qu'elle convergente3) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $v_n = \frac{1}{u_n+2}$ a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétiqueb) Exprimer v_n et u_n en fonction de n et déterminer $\lim u_n$

Exercice 06

 (u_n) la suite définie par: $u_0 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{8(u_n-1)}{u_n+2}$ 1) Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2 < u_n < 4$.2) Etudier la monotonie de (u_n) et déduire qu'elle convergente3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose: $v_n = \frac{u_n-4}{u_n-2}$ a) Montrer que la suite (v_n) est géométriqueb) Exprimer v_n et u_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ 4) a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$ b) En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ c) Dédurre une autre fois $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 07

 f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 1) a) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : f(x) \leq x$.b) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ 2) Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < 1$.b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.c) Dédurre que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite

Exercice 08

 (u_n) la suite tel que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ et $u_0 = 1$.4) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq 3$ 5) Montrer que (u_n) est croissante6) Dédurre que (u_n) est convergente et déterminer sa limite

Exercice 01

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n}$; c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n}$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5+6\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$; f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - 3^n$

Solution :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -5n + 1 = -\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

• Levons l'indétermination en **factorisant par le plus haut degré** :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{5n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

• Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} = 1$ par limite d'une somme Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = +\infty$ par limite d'un produit.

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1 = +\infty$.

b) • $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3\sqrt{n} = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{3\sqrt{n}}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{3(\sqrt{n})^2}{n\sqrt{n}}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{3}{\sqrt{n}}\right) = +\infty \end{aligned}$$

Car $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{\sqrt{n}} = 1$

c) • $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5n^2 + 4 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^2 + 3n = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

• Levons l'indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2} \times \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3n}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}} \end{aligned}$$

• Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^2} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 + \frac{4}{n^2} = 5$ par limite d'une somme.

On prouve de même que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + \frac{3}{n} = 4$.

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}} = \frac{5}{4}$. Et donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n} = \frac{5}{4}$.

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$, Car $-1 < -\frac{1}{2} < 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$.

e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + 6\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, Car $-1 < \frac{2}{3} < 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + 6\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{5 + 6 \times 0}{1 - 0} = 5$.

f) • $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\infty - \infty$; Levons

l'indétermination : $2^n - 3^n = 3^n \left(\frac{2^n}{3^n} - 1 \right) = 3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right)$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$, Car $-1 < \frac{2}{3} < 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 = -1$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ car $3 > 1$

Donc par limite d'un produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right) = -\infty$

Soit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - 3^n = -\infty$.

Exercice 02

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_0 = 0$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq n$

2) Dédurre la limite de (u_n)

Solution :

1) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq n$

➤ Pour $n=0$ on a $u_0 = 0 \geq 0$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel ,

Supposons que $u_n \geq n$ et montrons que $u_{n+1} \geq n + 1$.

On a $u_n \geq n$ donc $2u_n \geq 2n$

et donc $2u_n + 3 \geq 2n + 3$.

d'où $u_{n+1} \geq 2n + 3$

et on a $2n + 3 - (n + 1) = n + 2 \geq 0$

donc $2n + 3 \geq (n + 1)$

Donc $u_{n+1} \geq n + 1$

➤ D'après le principe de récurrence, on a $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq n$

2) On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \geq n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Exercice 03

Soit la suite (u_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

1) Montrer que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \leq 3$

2) Etudier la monotonie de (u_n) et déduire qu'elle convergente

3) En déduire que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq 2$

4) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $v_n = u_n - 3$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique

b) Exprimer v_n en fonction de n

c) Calculer u_n en fonction de n puis préciser la limite de (u_n)

5) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} + v_n$

Calculer S_n en fonction de n puis préciser la limite de (S_n)

6) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n$

Calculer T_n en fonction de n puis préciser la limite de (T_n)

Solution :

1) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.

➤ Pour $n=0$ on a $u_0 = 2 < 3$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

Soit n un entier naturel,

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $u_n < 3$ et montrons que $u_{n+1} < 3$.

On a $u_n < 3$ donc $\frac{1}{3}u_n < \frac{1}{3} \times 3$

et donc $\frac{1}{3}u_n + 2 < \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$. ; d'où $u_{n+1} < 3$

D'après le principe de récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < 3$

2) Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n = \left(\frac{1}{3} - 1 \right) u_n + 2 = -\frac{2}{3}u_n + 2 \\ &= -\frac{2}{3} \left(u_n - 2 \times \frac{3}{2} \right) = -\frac{2}{3}(u_n - 3) \end{aligned}$$

$$u_n < 3 \Rightarrow u_n - 3 < 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}(u_n - 3) > 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante

On a la suite (u_n) est majorée par 3 et croissante donc elle est convergente

3) En déduire que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq 2$

On a la suite (u_n) est croissante donc $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq u_0 = 2$

4) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $v_n = u_n - 3$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique

Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 \\ &= \frac{1}{3}u_n - 1 \\ &= \frac{1}{3}(u_n - 3) \\ &= \frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$

b) Exprimer v_n en fonction de n

On a la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -1$

$$\text{Donc } v_n = v_0 \times (q)^n$$

$$\text{Donc } v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

c) Calculer u_n en fonction de n puis préciser la limite de (u_n)

$$\text{On a } v_n = u_n - 3$$

$$\text{Donc } u_n = 3 + v_n$$

$$\text{Donc } u_n = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3$$

$$\text{Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

5) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} + v_n$
Calculer S_n en fonction de n puis préciser la limite de (S_n)

On a la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -1$

$$\text{Donc } S_n = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$\text{Donc } S_n = -1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Donc } S_n = -\frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$$

6) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n$
Calculer T_n en fonction de n puis préciser la limite de (T_n)

On a $u_n = 3 + v_n$ donc :

$$\begin{aligned} T_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n \\ &= 3 + v_0 + 3 + v_1 + \dots + 3 + v_{n-1} + 3 + v_n \\ &= 3 + 3 + \dots + 3 + 3 + v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} + v_n \\ &= 3(n+1) + S_n \\ &= 3(n+1) - \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = 3n + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3(n+1) - \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3(n+1) = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\frac{3}{2}$$

Exercice 04

Soit (u_n) une suite tel que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{3u_n}{21+u_n}$ et $U_0 = 1$

1) Montrer que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

2) Montrer que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \frac{1}{7} u_n$

3) En déduire la monotonie de (u_n)

4) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq (\frac{1}{7})^n$

puis calculer la limite de (u_n)

5) On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \sqrt{9 - 2u_n}$,

Calculer la limite de (v_n)

Solution :

1) Pour $n=0$ on a $u_0 = 1 > 0$

donc la proposition est vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel

Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$.

$$* \text{ On a : } u_{n+1} = \frac{3u_n}{21+u_n}$$

Et on a : $u_n > 0$

donc $3u_n > 0$ et $21 + u_n > 0$

$$\text{Donc } \frac{3u_n}{21+u_n} > 0$$

Donc $u_{n+1} > 0$.

➤ D'après le principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 0$

➤

2) Soit n un entier naturel,

1^{ère} méthode : (la différence)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{1}{7} u_n &= \frac{3u_n}{21+u_n} - \frac{1}{7} u_n \\ &= \frac{7 \times 3u_n - (21+u_n)u_n}{7(21+u_n)} \\ &= \frac{21u_n - 21u_n - u_n^2}{7(21+u_n)} \\ &= \frac{-u_n^2}{7(21+u_n)} < 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - \frac{1}{7} u_n \leq 0$$

$$\text{D'où } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \frac{1}{7} u_n$$

2^{ème} méthode : (l'encadrement)

On a : $u_n > 0$ donc $21 + u_n \geq 21$

$$\text{Donc : } \frac{1}{21+u_n} \leq \frac{1}{21}$$

$$\text{Donc : } \frac{3}{21+u_n} \leq \frac{3}{21}$$

$$\text{Donc : } \frac{3}{21+u_n} \leq \frac{1}{7}$$

$$\text{Donc : } \frac{3u_n}{21+u_n} \leq \frac{1}{7} u_n ; \text{ car } u_n > 0$$

$$\text{D'ou : } u_{n+1} \leq \frac{1}{7} u_n$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$

on a : $u_{n+1} \leq \frac{1}{7}u_n$ et $u_n > 0$

Donc : $u_{n+1} \leq \frac{1}{7}u_n \leq u_n$

Donc : $u_{n+1} \leq u_n$

Donc la suite (u_n) est décroissante

1) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n$ il suffit de montrer que $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

1ère méthode : (par récurrence)

➤ Pour $n=0$ on a $u_0 = 1 \leq \left(\frac{1}{7}\right)^0 = 1$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ montrons que $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$.

On a $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ donc $\frac{1}{7}u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

Et on a d'après la question précédente $u_{n+1} \leq \frac{1}{7}u_n$

Donc $u_{n+1} \leq \frac{1}{7}u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

D'où : $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

➤ D'après le principe de récurrence, on a $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

2ème méthode :

On a ; $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} \leq \frac{1}{7}u_n$

Pour $n=0$ on a : $u_1 \leq \frac{1}{7}u_0$

Pour $n=1$ on a : $u_2 \leq \frac{1}{7}u_1$

...

Pour $n-2$ on a : $u_{n-1} \leq \frac{1}{7}u_{n-2}$

Pour $n-1$ on a : $u_n \leq \frac{1}{7}u_{n-1}$

On multiplie les inégalités terme à terme car sont positives, on

trouve : $u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n-1} \times u_n \leq \frac{1}{7}u_0 \times \frac{1}{7}u_1 \times \dots \times \frac{1}{7}u_{n-1} \times \frac{1}{7}u_n$

C-à-dire : $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

Déduite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

Et on a : $-1 < \frac{1}{7} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$

Donc d'après théorème d'encadrement on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

5) On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \sqrt{9 - 2u_n}$, calculer la limite de (v_n)

On a : $v_n = \sqrt{9 - 2u_n} = f(u_n)$ tel que $f: x \mapsto \sqrt{9 - 2x}$

On a la fonction f est continue en 0 et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f(0) = \sqrt{9} = 3$

Exercice 05

(u_n) une suite tel que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$ et $u_0 = 1$

1) Montrer que ; $(\forall n \in \mathbb{N}): u_n > -2$

2) Montrer que (u_n) est convergente

3) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique

b) Calculer u_n en fonction de n puis préciser la limite de (u_n)

Solution :

1) Démontrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}): u_n > -2$

➤ Pour $n=0$ on a $u_0 = 1 > -2$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $u_n > -2$ et montrons que $u_{n+1} > -2$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} + 2 &= 1 - \frac{9}{u_n + 5} + 2 \\ &= 3 - \frac{9}{u_n + 5} \\ &= \frac{3(u_n + 5) - 9}{u_n + 5} \\ &= \frac{3u_n + 6}{u_n + 5} \\ &= \frac{3(u_n + 2)}{u_n + 5} \end{aligned}$$

On a $u_n > -2$ donc $u_n + 5 > 3$ donc $u_n + 5 > 0$

Et on a $u_n > -2$ donc $u_n + 2 > 0$ donc $3(u_n + 2) > 0$

Donc $\frac{3(u_n + 2)}{u_n + 5} > 0$ donc $u_{n+1} + 2 > 0$ donc $u_{n+1} > -2$

➤ D'après le principe de récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > -2$

2) Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 - \frac{9}{u_n + 5} - u_n \\ &= \frac{u_n + 5 - 9 - u_n(u_n + 5)}{u_n + 5} \\ &= \frac{-4 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 5} \\ &= \frac{-(u_n^2 + 4u_n + 4)}{u_n + 5} = \frac{-(u_n + 2)^2}{u_n + 5} < 0 \end{aligned}$$

Donc : $u_{n+1} - u_n < 0$

Donc la suite (u_n) est décroissante

la suite (u_n) est décroissante et minorée par -2 donc elle est convergente

3)a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} + 2} - \frac{1}{u_n + 2} \\ &= \frac{1}{\frac{3(u_n + 2)}{u_n + 5}} - \frac{1}{u_n + 2} \\ &= \frac{u_n + 5}{3(u_n + 2)} - \frac{3}{3(u_n + 2)} \\ &= \frac{u_n + 5 - 3}{3(u_n + 2)} = \frac{u_n + 2}{3(u_n + 2)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc (v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$ et $v_0 = \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{1}{3}$

b) Soit n un entier naturel,

la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$ et $v_0 = \frac{1}{3}$

Donc $v_n = v_0 + r(n - 0)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n \\ &= \frac{1}{3}(1 + n) \end{aligned}$$

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2} \Rightarrow u_n + 2 = \frac{1}{v_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n} - 2$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{\frac{1}{3}(1+n)} - 2$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{3}{1+n} - 2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{1+n} - 2 = -2 ; \text{ car : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{1+n} = 0$$

Exercice 06

(u_n) la suite définie par: $u_0 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2}$

1) Montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2 < u_n < 4$.

2) Etudier la monotonie de (u_n) et déduire qu'elle convergente

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose: $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$

a-Montrer que la suite (v_n) est géométrique

b- Exprimer v_n et u_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4) a-Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

b-En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

c-Déduite une autre fois $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Solution :

➤ 1) Pour $n=0$ on a $2 < u_0 = 3 < 4$ donc la PV pour $n = 0$

➤ Supposons que $2 < u_n < 4$ et montrons que $2 < u_{n+1} < 4$.

$$\begin{aligned} * \quad u_{n+1} - 2 &= \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - 2 \\ &= \frac{8(u_n - 1) - 2(u_n + 2)}{u_n + 2} \\ &= \frac{6u_n - 12}{u_n + 2} = \frac{6(u_n - 2)}{u_n + 2} \end{aligned}$$

On a $u_n > 2$

donc $u_n + 2 > 4$

Donc $u_n - 2 > 0$

Et $u_n > 2$

donc $u_n - 2 > 0$

Donc $6(u_n - 2) > 0$

Donc : $\frac{6(u_n - 2)}{u_n + 2} > 0$

Donc $u_{n+1} - 2 > 0$

Donc $u_{n+1} > 2$.

d'où $2 < u_{n+1} < 4$

➤ D'après le principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N} : 2 < u_n < 4$

$$\begin{aligned} * \quad u_{n+1} - 4 &= \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - 4 \\ &= \frac{8(u_n - 1) - 4(u_n + 2)}{u_n + 2} \\ &= \frac{4u_n - 16}{u_n + 2} = \frac{4(u_n - 4)}{u_n + 2} \end{aligned}$$

Et on a $u_n < 4$

Donc $u_n - 4 < 0$

donc $4(u_n - 4) < 0$

Et $u_n + 2 > 0$;

donc $\frac{4(u_n - 4)}{u_n + 2} > 0$

Donc $u_{n+1} - 4 < 0$

Donc $u_{n+1} < 4$

2) Soit n un entier naturel,

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - u_n \\
 &= \frac{8(u_n - 1) - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} \\
 &= \frac{8u_n - 8 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} \\
 &= \frac{-(u_n^2 - 6u_n + 8)}{u_n + 2} = \frac{-(u_n - 4)(u_n - 2)}{u_n + 2} \\
 2 < u_{n+1} < 4 &\Rightarrow (u_n - 4) < 0 \text{ et } (u_n - 2) > 0 \text{ et } (u_n + 2) > 0 \\
 &\Rightarrow \frac{-(u_n - 4)(u_n - 2)}{u_n + 2} > 0
 \end{aligned}$$

Donc : $u_{n+1} - u_n > 0$

Donc la suite (u_n) est croissante

La suite (u_n) est croissante et majorée par 4 donc elle est convergente

3)a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} - 2} = \frac{\frac{4(u_n - 4)}{u_n + 2}}{\frac{6(u_n - 2)}{u_n + 2}} \\
 &= \frac{4(u_n - 4)}{6(u_n - 2)} \\
 &= \frac{4(u_n - 4)}{6(u_n - 2)} = \frac{2}{3} v_n
 \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et $v_0 = \frac{u_0 - 4}{u_0 - 2} = \frac{-1}{1} = -1$

a) v_n en fonction de n

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et $v_0 = -1$

Donc $v_n = v_0 \times (q)^{n-0}$

$$= - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

* u_n en fonction de n

$$\begin{aligned}
 v_n &= \frac{u_n - 4}{u_n - 2} \Rightarrow v_n(u_n - 2) = u_n - 4 \\
 &\Rightarrow u_n v_n - 2v_n - u_n = -4 \\
 &\Rightarrow u_n(v_n - 1) = 2v_n - 4 \\
 &\Rightarrow u_n = \frac{2v_n - 4}{v_n - 1} \Rightarrow u_n = \frac{-2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}
 \end{aligned}$$

* la limite de la suite (u_n)

On a : $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1} = \frac{0 - 4}{0 - 1} = 4$;

4)a) Soit n un entier naturel,

1^{ère} méthode : (la différence)

$$\begin{aligned}
 4 - u_{n+1} - \frac{4}{5}(4 - u_n) &= \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} - \frac{4}{5}(4 - u_n) \\
 &= 4(4 - u_n) \left(\frac{1}{u_n + 2} - \frac{1}{5} \right) \\
 &= 4(4 - u_n) \left(\frac{5 - u_n - 2}{5(u_n + 2)} \right) \\
 &= \frac{4(4 - u_n)(3 - u_n)}{5(u_n + 2)}
 \end{aligned}$$

On a la suite (u_n) est croissante donc $u_n \geq u_0$

Donc $u_n \geq 3$ donc $3 - u_n \leq 0$

Et on a $u_n > 4$ donc $4 - u_n > 0$

Et on a $u_n + 2 > 0$

Donc $\frac{4(4 - u_n)(3 - u_n)}{u_n + 2} \leq 0$;

Donc $4 - u_{n+1} - \frac{4}{5}(4 - u_n) \leq 0$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

2ème méthode : (l'encadrement)

On a d'après la question 1) : $4 - u_{n+1} = \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2}$

En a la suite (u_n) est croissante donc $u_n \geq u_0$ c-à-dire $u_n \geq 3$

Donc $u_n + 2 \geq 5$

Donc : $\frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{5}$

Et on a $u_n > 4$ donc $4 - u_n > 0$

Donc $4(4 - u_n) > 0$

D'où : $\frac{1}{u_n + 2} \times 4(4 - u_n) \leq \frac{1}{5} \times 4(4 - u_n)$

DONC : $\frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

D'où $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

b-En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}); 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

1ère méthode : (par récurrence)

➤ Pour $n=0$ on a $4 - u_0 = 4 - 3 = 1 \leq \left(\frac{4}{5}\right)^0 = 1$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ montrons que $4 - u_{n+1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$.

On a $4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ donc $\frac{4}{5}(4 - u_n) \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

Et on a d'après la question précédente $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

Donc $4 - u_{n+1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

➤ D'après le principe de récurrence, on a $(\forall n \in \mathbb{N}); 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

2ème méthode :

On a ; $(\forall n \in \mathbb{N}): 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

Pour $n=0$ on a : $4 - u_1 \leq \frac{4}{5}(4 - u_0)$

Pour $n=1$ on a : $4 - u_2 \leq \frac{4}{5}(4 - u_1)$

...

...

....

Pour $n-2$ on a : $4 - u_{n-1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_{n-2})$

Pour $n-1$ on a : $4 - u_n \leq \frac{4}{5}(4 - u_{n-1})$

On multiplie les inégalités terme à terme car sont positives, on trouve :

$(4 - u_1)(4 - u_2) \dots (4 - u_n) \leq \frac{4}{5}(4 - u_0) \frac{4}{5}(4 - u_1) \dots \frac{4}{5}(4 - u_{n-1})$

C-à-dire : $4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n (4 - u_0)$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}); 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

c-Déduite une autre fois $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

On a $u_n > 4$ donc $4 - u_n > 0$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

Et on a : $-1 < \frac{4}{5} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$

Donc d'après théorème d'encadrement on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - u_n = 0$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

Exercice 07

f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1) a-Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}^+): f(x) \leq x$.

b-Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

2) On considère la suite (u_n) définie par:

$u_0 = 1/2$ Et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a-Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < 1$.

b-Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c-En déduire que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite

Solution :

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - x \\ &= \frac{x - x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{x^2 - x^2\sqrt{1+x^2}}{(x + x\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{x^2 - x^2(1+x^2)}{(x + x\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{x^2 - x^2 - x^4}{(x + x\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{-x^4}{(x + x\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} \leq 0 \end{aligned}$$

Donc : $f(x) - x \leq 0$; D'ou : $(\forall x \in \mathbb{R}^+): f(x) \leq x$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 \times \sqrt{1+x^2}) - (x \times \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})}{\sqrt{1+x^2}^2} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{(1+x^2) - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} > 0 \end{aligned}$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

3)a) Démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 1$

➤ Pour $n=0$ on a $0 \leq u_0 = 1/2 \leq 1$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

On sait que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$ et $0 \leq u_n \leq 1$, donc ;

$$0 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1/2$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1 \quad ; \text{ car } 1/2 < 1$$

D'après le principe de récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n \leq 1$ □

b) Soit n un entier naturel,

On a : $(\forall x \in [0; 1]): f(x) \leq x$, d'après 1)a)

et $u_n \in [0; 1]$ d'après 3)a)

Donc on pose $x = u_n$, on trouve $f(u_n) \leq u_n$

Donc : $u_{n+1} \leq u_n$; d'où la suite (u_n) est décroissante

c) la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est **convergente**.

- La fonction f est continue sur l'intervalle $[0; 1]$; car elle est dérivable sur $[0; 1]$
- $f([0; 1]) = [f(0); f(1)] = [0; 1/2] \subset [0; 1]$
- $u_0 = 1/2 \in [0; 1]$
- La suite (u_n) est convergente

Alors la limite de la suite (u_n) est L la solution de l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^4}{(x + x\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} = 0 \quad ; \text{ car } f(x) - x \text{ déjà calculé}$$

$$\Leftrightarrow -x^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Donc la limite de la suite (u_n) est 0

Exercice 08

(u_n) définie la suite tel que ; $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ et $u_0 = 1$.

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq 3$

3) Montrer que (u_n) est croissante

4) Déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite

Solution :

1) Démontrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq 3$

➤ Pour $n=0$ on a $1 \leq u_0 = 1 \leq 3$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

➤ Soit n un entier naturel,

Supposons que $1 \leq u_n \leq 3$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq 3$.

Considérons la fonction $f: x \rightarrow \sqrt{2x + 3}$ sur l'intervalle $[1; 3]$

On a f est dérivable sur $[1; 3]$ et $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[1; 3]$,

$1 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(3)$, car f est croissante

$$\Rightarrow \sqrt{5} \leq \sqrt{2u_n + 3} \leq 3$$

$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 3 \quad ; \text{ car } 1 < \sqrt{5}$$

D'après le principe de récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq u_n \leq 3$

2) Soit n un entier naturel,

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - u_n = \frac{2u_n + 3 - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$$

$$= \frac{-u_n^2 + 2u_n - 3}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n - 3)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$$

$$1 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow u_n - 1 \geq 0 \text{ et } u_n - 3 \leq 0 \text{ et } \sqrt{2u_n + 3} + u_n > 0$$

$$\Rightarrow -\frac{(u_n - 1)(u_n - 3)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$$

Donc la suite (u_n) est croissante

3) la suite (u_n) est croissante et majorée par 3 donc convergente.

Considérons la fonction définie sur $[1; 3]$ par $f: x \rightarrow \sqrt{2x + 3}$

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

- f est continue sur l'intervalle $[1; 3]$, car dérivable sur $[1; 3]$

$$\bullet f([1; 3]) = [f(1); f(3)] = [\sqrt{5}; 3] \subset [1; 3]$$

$$\bullet u_0 = 1 \in [1; 3]$$

- La suite (u_n) est convergente

Alors la limite de la suite (u_n) est L la solution de

l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{2x + 3} = x \Leftrightarrow 2x + 3 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3$$

Et on a la suite (u_n) est croissante donc la limite est 3