

LIMITES ET CONTINUITÉ

(Partie 1)

I. Limite d'une fonction à l'infini

1) Limite finie à l'infini

Intuitivement :

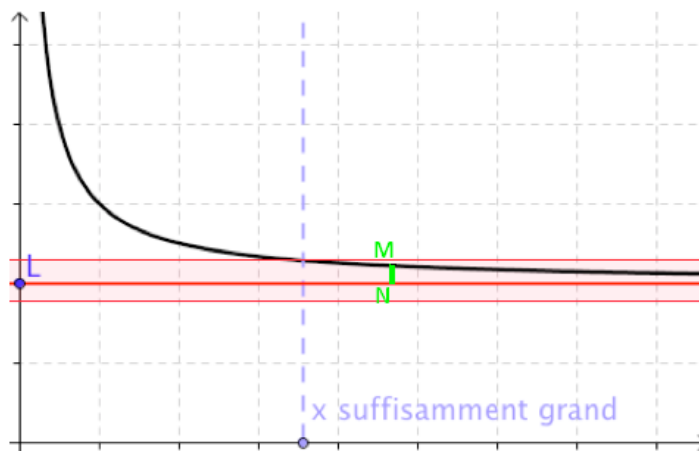
On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple :

La fonction définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers $+\infty$.

En effet, les valeurs de la fonction se resserrent autour de 2 dès que x est suffisamment grand. La distance MN tend vers 0.

Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.



Définition :

On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L.$$

Définitions : - La droite d'équation $y = L$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

- La droite d'équation $y = L$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

Remarque :

Lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe de la fonction "se rapproche" de son asymptote.
La distance MN tend vers 0.

2) Limite infinie à l'infiniIntuitivement :

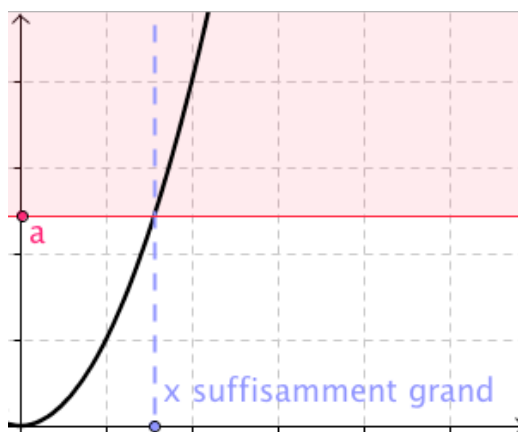
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple :

La fonction définie par $f(x) = x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment grand.

Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a; +\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment grand.

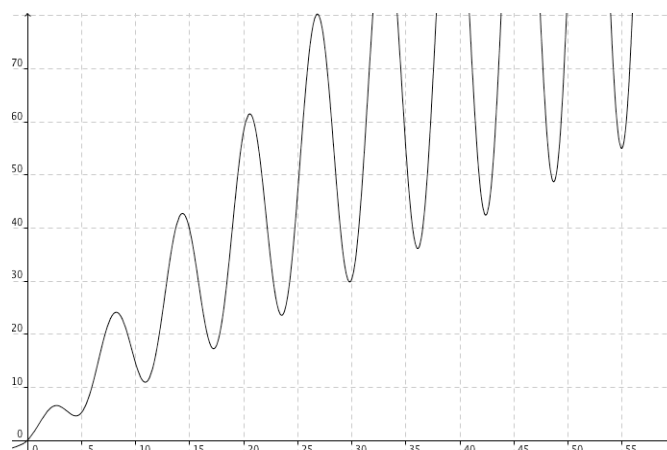


Définitions : - On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]a; +\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

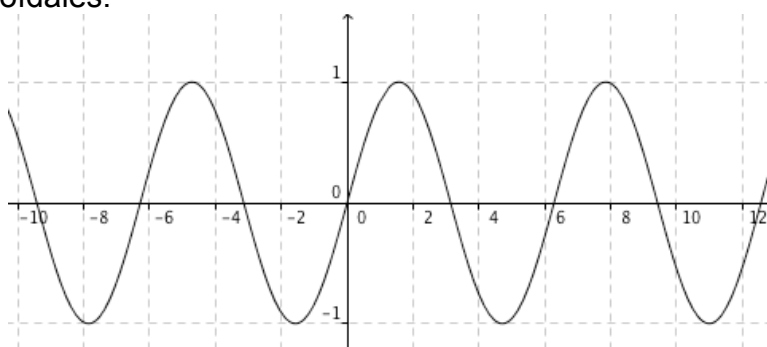
- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty; b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Remarques :

- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.



- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.



3) Limites des fonctions usuelles

Propriétés :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

II. Limite d'une fonction en un réel A

Intuitivement :

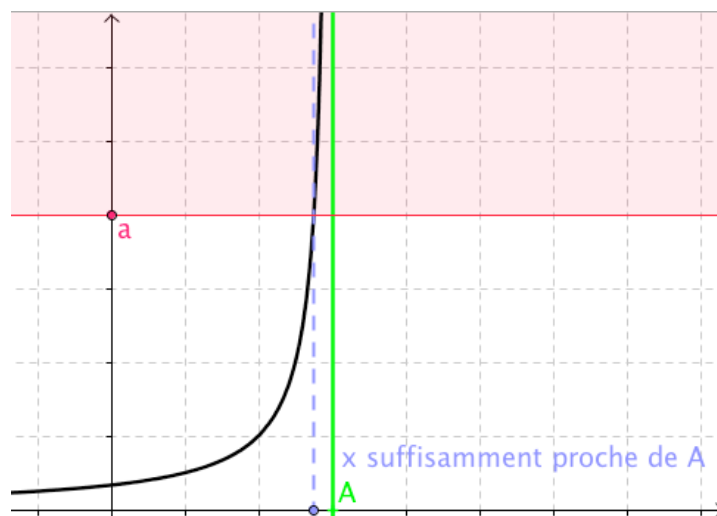
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de A .

Exemple :

La fonction représentée ci-dessous a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers A .

En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment proche de A .

Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a; +\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment proche de A .



Définitions : - On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si tout intervalle $]a; +\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty$

- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en A si tout intervalle $]-\infty; b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = -\infty$

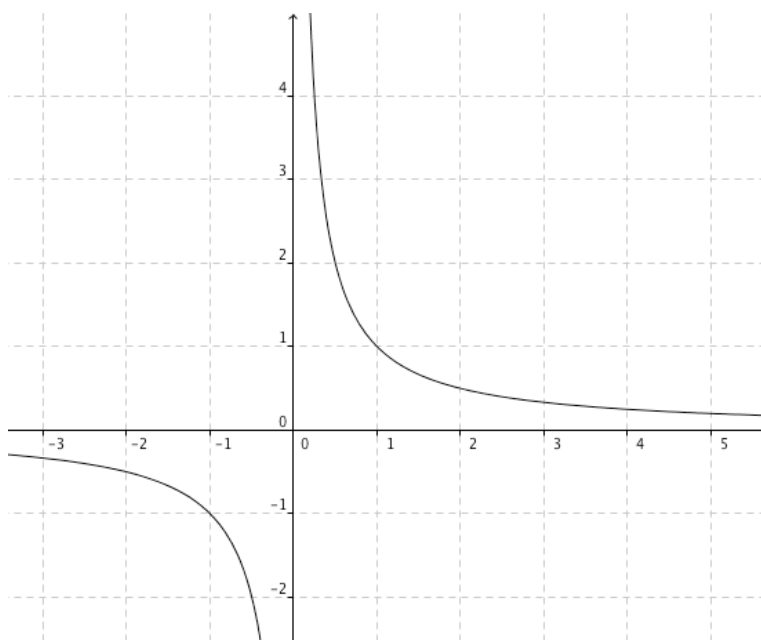
Définition : La droite d'équation $x = A$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f si $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = -\infty$.

Remarque :

Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel A selon $x > A$ ou $x < A$.

Considérons la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Si $x < 0$, alors $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$.
- Si $x > 0$, alors $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.



On parle de limite à gauche de 0 et de limite à droite de 0.

Déterminer graphiquement des limites d'une fonction :

▶ Vidéo <https://youtu.be/9nEJCL3s2eU>

III. Opérations sur les limites

▶ Vidéo <https://youtu.be/at6pFx-Umfs>

α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

1) Limite d'une somme

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x)) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

2) Limite d'un produit

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$	L	$L > 0$	$L < 0$	$L > 0$	$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x)g(x)) =$	$L L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

3) Limite d'un quotient

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$	L	L	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	$L' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) < 0$	0 avec $g(x) < 0$	0	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-5)(3+x^2)$?

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-5) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (3+x^2) = +\infty$$

D'après la règle sur la limite d'un produit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-5)(3+x^2) = -\infty$

Remarque :

Comme pour les suites, on rappelle que les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$"\infty - \infty", "0 \times \infty", "\frac{\infty}{\infty}" \text{ et } "\frac{0}{0}."$$

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions polynômes et rationnelles

▶ Vidéo <https://youtu.be/4NQbGdXThrK>

▶ Vidéo <https://youtu.be/8tAVa4itblc>

▶ Vidéo <https://youtu.be/pmWPfsQaRWI>

Calculer : 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3 + 2x^2 - 6x + 1)$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5}$ 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2}{4x - 1}$

1) Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $-\infty + (+\infty) + (-\infty)$ "

Levons l'indétermination :

$$-3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = x^3 \left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0.$$

Donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -3$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$, on a par produit de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3 + 2x^2 - 6x + 1) = -\infty$.

2) En appliquant la méthode de la question 1) pour le numérateur et le dénominateur de la fonction rationnelle, cela nous conduit à une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Levons l'indétermination :

$$\frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5} = \frac{x^2}{x^2} \times \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}} = \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = 0.$$

Donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(6 - \frac{5}{x^2} \right) = 6$.

Donc comme quotient de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5} = \frac{1}{3}$.

3) Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Levons l'indétermination :

$$\frac{3x^2 + 2}{4x - 1} = \frac{x^2}{x} \times \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}} = x \times \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{2}{x^2} \right) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4 - \frac{1}{x} \right) = 4$.

Donc comme quotient de limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}} = \frac{3}{4}$.

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, donc comme produit de limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \times \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}} = -\infty$

Et donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2}{4x - 1} = -\infty$.

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions avec des radicaux

▶ Vidéo <https://youtu.be/n3XapvUfXJQ>

▶ Vidéo <https://youtu.be/y7Sbqkb9RoU>

Calculer : 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ 2) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$

1) Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ "

Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

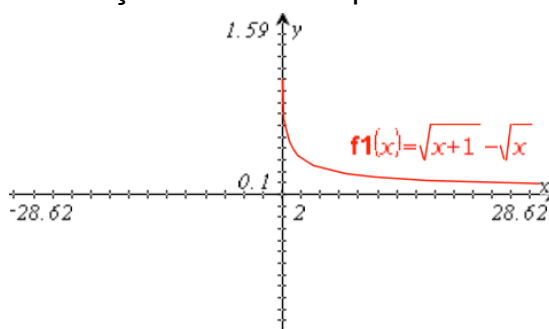
Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = +\infty$.

Et donc par quotient de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$.

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0$.

On peut vérifier la pertinence du résultat en traçant la courbe représentative de la fonction $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.



2) $\lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt{x-1} - 2) = \sqrt{5-1} - 2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 5} (x-5) = 5-5 = 0$.

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{0}{0}$ ".

Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

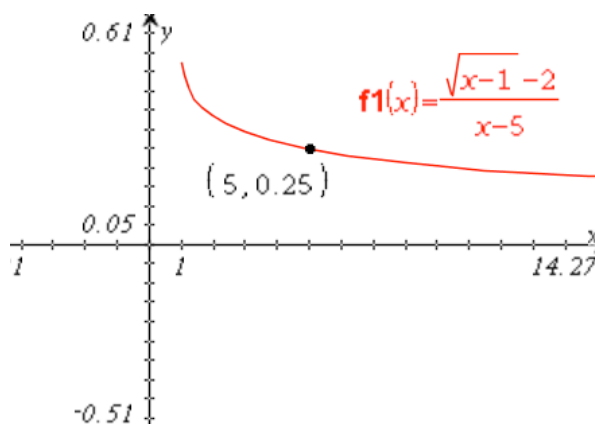
$$\frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5} = \frac{(\sqrt{x-1} - 2)(\sqrt{x-1} + 2)}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x-1} + 2}$$

Or $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-1} = \sqrt{5-1} = 2$ donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-1} + 2 = 2 + 2 = 4$.

Donc par quotient de limites, on a $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 2} = \frac{1}{4}$.

Et donc $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5} = \frac{1}{4}$.

En traçant à l'aide de la calculatrice la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$, il est possible de vérifier la pertinence de la solution trouvée en plaçant un point sur la courbe. Attention cependant, la calculatrice ne fait pas apparaître que la fonction f n'est pas définie en 5.



Méthode : Déterminer une asymptote

► Vidéo <https://youtu.be/0LDGK-QkL80>

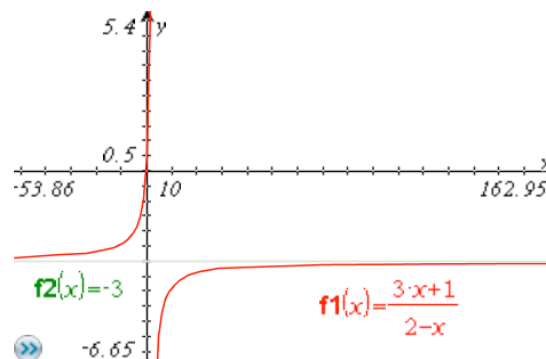
► Vidéo <https://youtu.be/pXDhrx-nMto>

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{3x+1}{2-x}$.

Démontrer que la droite d'équation $y = -3$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Il faut donc démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{2-x} = -3$:

$$\frac{3x+1}{2-x} = \frac{x}{x} \times \frac{3+\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}-1} = \frac{3+\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}-1}$$



Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} - 1\right) = -1$.

Et donc par quotient de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}-1} = \frac{3}{-1} = -3$

Et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ par $g(x) = \frac{2x}{x-4}$.

Démontrer que la droite d'équation $x = 4$ est asymptote verticale à la courbe représentative de g .

Il faut donc démontrer que la limite la fonction g possède une limite infinie en 4.

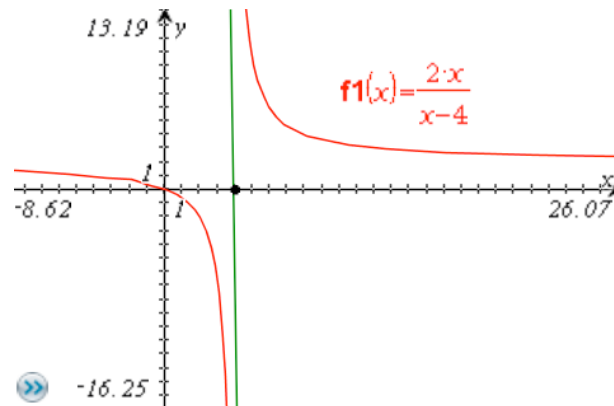
$$- \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} (x - 4) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 4} 2x = 8.$$

$$\text{Donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \frac{2x}{x - 4} = -\infty \text{ car } x - 4 < 0.$$

$$- \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} (x - 4) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 4} 2x = 8.$$

$$\text{Donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} \frac{2x}{x - 4} = +\infty \text{ car } x - 4 > 0.$$

On en déduit que la droite d'équation $x = 4$ est asymptote verticale à la courbe représentative de g .



LIMITES ET CONTINUITE

(Partie 2)

I. Limite d'une fonction composée

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ par $f(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$.

On souhaite calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

On considère les fonctions u et v définie par : $u(x) = 2 - \frac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

Alors : $f(x) = v(u(x))$. On dit alors que f est la composée de la fonction u par la fonction v .

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 2$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{u(x)} = \lim_{X \rightarrow 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$.

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{2}$.

Théorème :

A, B, C peuvent désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

Si $\lim_{x \rightarrow A} u(x) = B$ et $\lim_{x \rightarrow B} v(x) = C$ alors $\lim_{x \rightarrow A} v(u(x)) = C$.

- Admis -

Méthode : Déterminer la limite d'une fonction composée

 **Vidéo** <https://youtu.be/DNU1M3li76k>

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x-1}{2x+3}}$

- On commence par calculer la limite de la fonction $x \mapsto \frac{4x-1}{2x+3}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Levons l'indétermination :

$$\frac{4x-1}{2x+3} = \frac{x}{x} \times \frac{4-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}} = \frac{4-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{1}{x}\right) = 4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{x}\right) = 2$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{4}{2} = 2$

Et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-1}{2x+3} = 2$.

- Par ailleurs, $\lim_{X \rightarrow 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$.

- Comme limite de fonctions composées, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x-1}{2x+3}} = \sqrt{2}$.

II. Limites et comparaisons

1) Théorème de comparaison

Théorème : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a; +\infty[$, a réel, telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leq g(x)$.

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ (figure 1)

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ (figure 2)

- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ (figure 3)

- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (figure 4)

Par abus de langage, on pourrait dire que la fonction f pousse la fonction g vers $+\infty$ pour des valeurs de x suffisamment grandes.

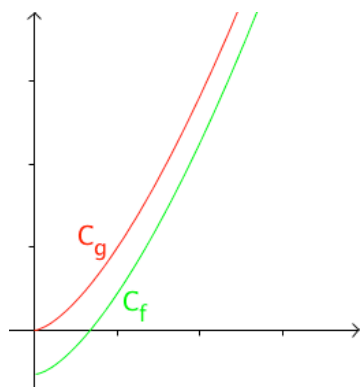


Figure 1

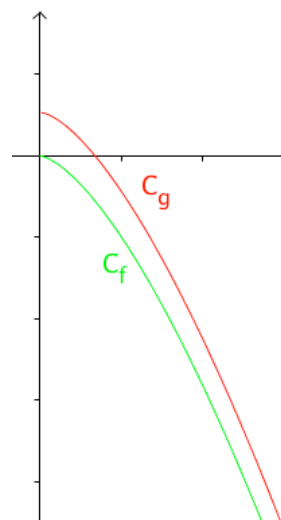


Figure 2

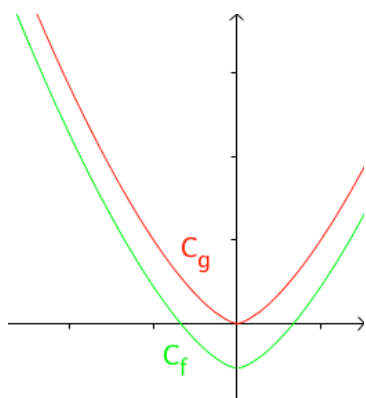


Figure 3

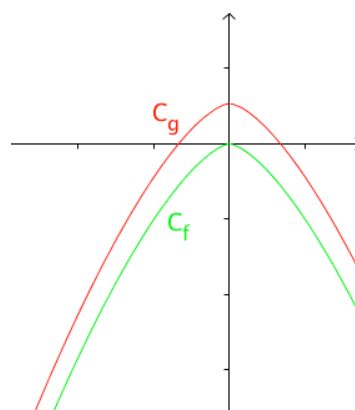


Figure 4

Démonstration dans le cas de la figure 1 :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc tout intervalle $]m; +\infty[$, m réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$

dès que x est suffisamment grand, soit : $f(x) \geq m$.

Or, dès que x est suffisamment grand, on a $f(x) \leq g(x)$.

Donc dès que x est suffisamment grand, on a : $g(x) \geq m$.

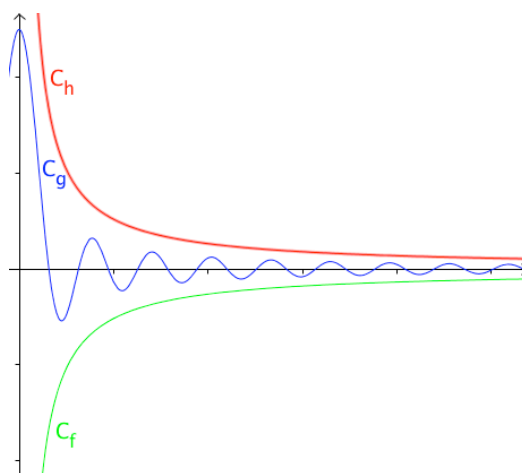
Et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

2) Théorème d'encadrement

Théorème des gendarmes : Soit f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]a; +\infty[$, a réel, telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L$.

Remarque : On obtient un théorème analogue en $-\infty$.



Par abus de langage, on pourrait dire que les fonctions f et h (les gendarmes) se resserrent autour de la fonction g pour des valeurs de x suffisamment grandes pour la faire tendre vers la même limite.

Ce théorème est également appelé le théorème du sandwich.

Méthode : Utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement

▶ Vidéo <https://youtu.be/OAtkpYMdu7Y>

▶ Vidéo <https://youtu.be/Eo1jvPphja0>

Calculer : 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x)$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1}$

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ n'existe pas. Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :

Pour tout x , $-1 \leq \sin x$ donc $x - 1 \leq x + \sin x$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x) = +\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ n'existe pas. Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :

Pour tout x , $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $-x \leq x \cos x \leq x$, car $x > 0$.

Et donc $-\frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{x \cos x}{x^2 + 1} \leq \frac{x}{x^2 + 1}$

Ou encore $-\frac{x}{x^2} \leq -\frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{x \cos x}{x^2 + 1} \leq \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{x}{x^2}$

Soit $-\frac{1}{x} \leq \frac{x \cos x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{x}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1} = 0$.

III. Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

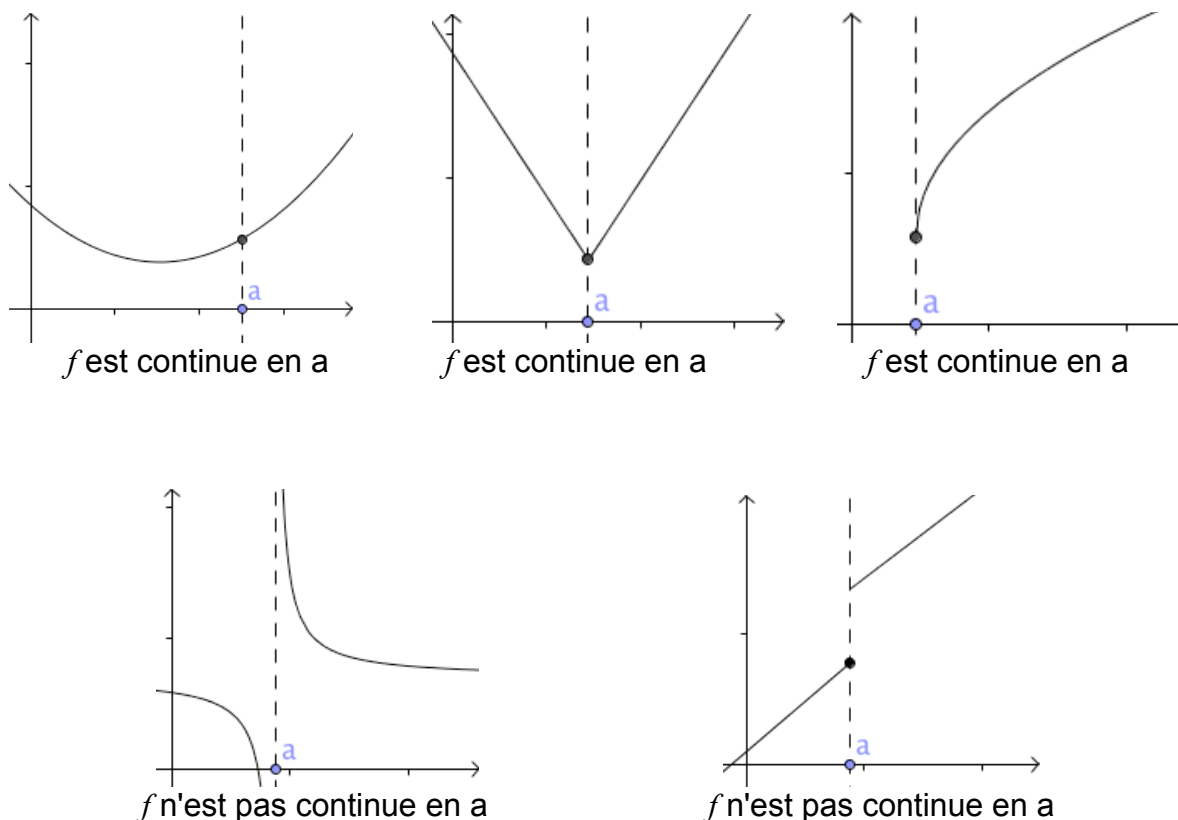


Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

1) Continuité

► Vidéo <https://youtu.be/XpjKserte6o>

Exemples et contre-exemples :



La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a .

- f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

- f est continue sur I si f est continue en tout point de I .

Exemples :

- Les fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$.

Remarque :

Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Théorème : Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

Méthode : Etudier la continuité d'une fonction

📺 Vidéo <https://youtu.be/03WMLyc7rLE>

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = -x + 2 & \text{pour } x < 3 \\ f(x) = x - 4 & \text{pour } 3 \leq x < 5 \\ f(x) = -2x + 13 & \text{pour } x \geq 5 \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Les fonctions $x \mapsto -x + 2$, $x \mapsto x - 4$ et $x \mapsto -2x + 13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.

Ainsi la fonction f est continue sur $]-\infty; 3[$, sur $[3; 5[$ et sur $[5; +\infty[$.

Etudions alors la continuité de f en 3 et en 5 :

$$- \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} (-x + 2) = -3 + 2 = -1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} (x - 4) = 3 - 4 = -1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = f(3) \text{ donc la fonction } f \text{ est continue en 3.}$$

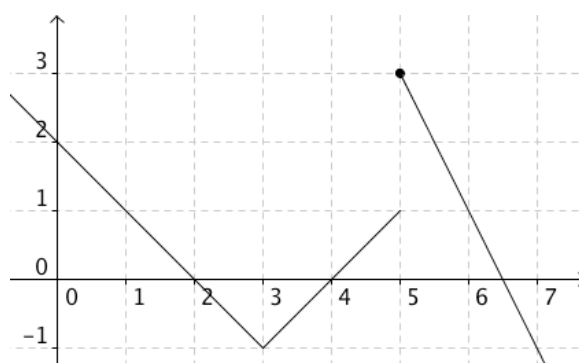
$$- \lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} (x - 4) = 5 - 4 = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} (-2x + 13) = -2 \times 5 + 13 = 3$$

La limite de f en 5 n'existe pas. On parle de limite à gauche de 5 et de limite à droite de 5.

La fonction f n'est donc pas continue en 5.

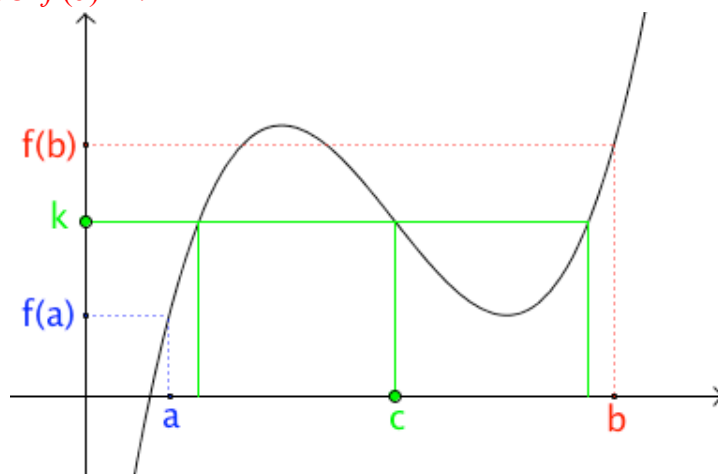
La fonction f est continue sur $]-\infty; 5[$ et sur $[5; +\infty[$.



2) Valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires :

On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle $[a ; b]$.
 Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



- Admis -

Conséquence :

Dans ces conditions, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a ; b]$.

Cas particuliers :

- Dans le cas où la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $[a ; b]$ alors le réel c est unique.
- Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Méthode : Résolution approchée d'une équation

► Vidéo <https://youtu.be/fkd7c3IAc3Y>

► Vidéo <https://youtu.be/UmGQf7gkvLg>

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution.

1) - Existence : $f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 = -2$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \times \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}\right) = +\infty$.

La fonction f est continue sur l'intervalle $]2; +\infty[$ et elle change de signe.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c tel que $f(c) = 0$.

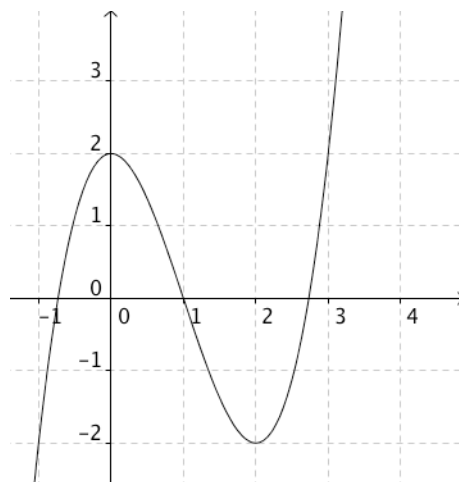
- Unicité : $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

Donc, pour tout x de $]2; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

- On en déduit qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = 0$.

2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des balayages successifs en augmentant la précision.



▶ Vidéo TI <https://youtu.be/MEkh0fxPakk>

▶ Vidéo Casio <https://youtu.be/XEZ5D19FpDQ>

▶ Vidéo HP <https://youtu.be/93mBoNOpEWg>

X	Y1
0	2
1	0
2	-2
3	2
4	10
5	22
6	40

La solution est comprise entre 2 et 3.

X	Y1
2	-2
2.1	-1.969
2.2	-1.872
2.3	-1.703
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704

La solution est supérieure à 2,6

X	Y1
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704
2.7	-.187
2.8	.432
2.9	1.159
3	2

La solution est comprise entre 2,7 et 2,8

X	Y ₁
2,7	-.187
2,71	-.1298
2,72	-.0716
2,73	-.0123
2,74	.04802
2,75	.10938
2,76	.17178

La solution est comprise entre 2,73 et 2,74.

On en déduit que $2,73 < c < 2,74$.

Remarque : Une autre méthode consiste à déterminer un encadrement par dichotomie.

TP Algorithmique "Dichotomie" :

http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo_SolEqua.pdf
