

PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

▶ Tout le cours sur les primitives en vidéo : <https://youtu.be/bQ-eS1zZCdw>

▶ Tout le cours sur les équations différentielles en vidéo : <https://youtu.be/qHF5kiDFkW8>

Partie 1 : Primitive d'une fonction

1) Définition et propriétés

Exemple :

On considère les fonctions f et F définies par : $f(x) = 2x + 3$ et $F(x) = x^2 + 3x - 1$

Si on dérive F , on constate que : $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$.

Lorsque $F' = f$, on dit que F est une primitive de f .

Définition : f est une fonction continue sur un intervalle I .

On appelle **primitive** de f , une fonction F , telle que : $F' = f$.

Remarque :

Dans ces conditions, dire que « F est une primitive de f »

revient à dire que « f est la dérivée de F ».

Méthode : Vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre fonction

▶ Vidéo <https://youtu.be/7tQgY9Vkmss>

Dans chaque cas, dire si F est une primitive de f .

a) $F(x) = \frac{x^2}{2}$ et $f(x) = x$.

b) $F(x) = xe^x$ et $f(x) = e^x(x + 1)$.

c) $F(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ et $f(x) = \frac{-\ln(x)}{x^2}$.

Correction

a) $F'(x) = \frac{2x}{2} = x = f(x)$

Donc F est une primitive de f .

b) $F'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = e^x(x + 1) = f(x)$

Donc F est une primitive de f .

c) $F'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \neq f(x)$

Donc F n'est pas une primitive de f .

Propriété : Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration au programme :

▶ Vidéo <https://youtu.be/oloWk2F4bl8>

Soit F et G deux primitives de la fonction f sur I .

Alors : $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$.

Donc : $F'(x) = G'(x)$, soit $F'(x) - G'(x) = 0$, soit encore $(F - G)'(x) = 0$.

La fonction $F - G$ possède une dérivée nulle sur I , elle est donc constante sur I .

On nomme C cette constante. Ainsi : $F(x) - G(x) = C$ pour tout x de I .

On en déduit que les deux primitives de f diffèrent d'une constante.

Propriété : f est une fonction continue sur un intervalle I .

Si F est une primitive de f alors pour tout réel C , la fonction $x \mapsto F(x) + C$ est une primitive de f .

Démonstration :

F est une primitive de f .

On pose $G(x) = F(x) + C$.

$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$.

Donc G est une primitive de f .

Exemple :

On a vu dans la méthode précédente que F est une primitive de f avec :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \text{ et } f(x) = x.$$

Donc, la fonction G définie par $G(x) = \frac{x^2}{2} + 5$ est également une primitive de f .

En effet : $G'(x) = \frac{2x}{2} + 0 = x = f(x)$.

Propriété : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

- Démontrée dans le chapitre Intégration -

Remarque : Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite.

Méthode : Recherche d'une primitive particulière

▶ Vidéo <https://youtu.be/-q9M7oJ9gkl>

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$.

a) Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ est une primitive de f .

b) Déterminer la primitive G de la fonction f qui s'annule en $x = 1$.

Correction

$$a) F'(x) = \frac{2e^{2x}x - e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2} = f(x).$$

Donc $F' = f$ et donc la fonction F est une primitive de f .

b) On cherche la primitive G de la fonction f qui s'annule en $x = 1$, soit : $G(1) = 0$.

Si G est une primitive de f alors : $G(x) = F(x) + C$, où C est un nombre réel.

$$\text{Donc : } G(1) = F(1) + C$$

$$\text{Et donc : } F(1) + C = 0$$

$$\text{Soit : } \frac{e^{2 \times 1}}{1} + C = 0$$

$$e^2 + C = 0$$

$$C = -e^2$$

La primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$ est G telle que :

$$G(x) = F(x) - e^2 = \frac{e^{2x}}{x} - e^2$$

2) Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Une primitive F
$a, a \in \mathbb{R}$	ax
x^n avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\}$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$ avec $x > 0$	$\ln(x)$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$

3) Linéarité des primitivesPropriété :

Si F est une primitive de f et G est une primitive de g alors :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$,
- kF est une primitive de kf , avec k réel.

Démonstrations :

- $(F + G)' = F' + G' = f + g$
- $(kF)' = kF' = kf$

Méthode : Déterminer une primitive (1)

▶ Vidéo https://youtu.be/GA6jMgLd_Cw

▶ Vidéo <https://youtu.be/82HYI4xuClw>

▶ Vidéo <https://youtu.be/gxRpmHWnoGQ>

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f .

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = x^3 - 2 & \text{b) } f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} & \text{c) } f(x) = \frac{1}{x^5} \\ \text{d) } f(x) = \frac{3}{x} \text{ sur }]0 ; +\infty[& \text{e) } f(x) = -\sin(x) & \text{f) } f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \end{array}$$

Correction

$$\text{a) } F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x$$

$$\text{b) } f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = 3x^2 - 3 \times \frac{1}{x^2} \text{ donc } F(x) = x^3 - 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{3}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) &= \frac{1}{x^5} = x^{-5} \\ F(x) &= \frac{1}{-4}x^{-4} = -\frac{1}{4x^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f(x) &= \frac{3}{x} = 3 \times \frac{1}{x} \\ F(x) &= 3 \ln(x) \end{aligned}$$

Remarque : L'intervalle de recherche de la primitive est $]0 ; +\infty[$, car la fonction $\ln$ est définie pour des valeurs strictement positive.

$$\begin{aligned} \text{e) } f(x) &= -\sin(x) \\ F(x) &= -(-\cos(x)) = \cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } f(x) &= \frac{2}{\sqrt{x}} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{x}} \\ F(x) &= 2 \times 2\sqrt{x} = 4\sqrt{x} \end{aligned}$$

4) Primitives de fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I .

Fonction	Une primitive
$u'u^n$ avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1 ; 0\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$	$\ln(u)$
$u'e^u$	e^u
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$

Méthode : Déterminer une primitive (2)

 Vidéo <https://youtu.be/iiq6eUQee9g>

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f .

a) $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)^2$

b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

c) $f(x) = x^2 e^{x^3}$

d) $f(x) = \cos(5x) - 3 \sin(3x - 1)$

Correction

a) $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)^2$ du type $u'u^n$, avec $n = 2$.

En effet : $u(x) = x^2 - 5x + 4 \rightarrow u'(x) = 2x - 5$

Une primitive de $u'u^2$ est de la forme $\frac{1}{3}u^3$

Soit : $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 5x + 4)^3$

b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ du type $\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

En effet : $u(x) = x^2 + 1 \rightarrow u'(x) = 2x$

Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est de la forme $2\sqrt{u}$.

Soit : $F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1}$

c) $f(x) = x^2 e^{x^3} = \frac{1}{3} \times 3x^2 e^{x^3}$ du type $u'e^u$.

En effet : $u(x) = x^3 \rightarrow u'(x) = 3x^2$.

Une primitive de $u'e^u$ est de la forme e^u .

Soit : $F(x) = \frac{1}{3} \times e^{x^3}$

d) $f(x) = \cos(5x) - 3 \sin(3x - 1) = \frac{1}{5} \times 5 \cos(5x) - 3 \sin(3x - 1)$

Donc $F(x) = \frac{1}{5} \times \sin(5x) + \cos(3x - 1)$

Partie 2 : Équations différentielles

1) Définition d'une équation différentielle

Définition : Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction et où interviennent des dérivées de cette fonction.

Exemples :

a) L'équation $f'(x) = 5$ est une équation différentielle.

L'inconnue est la fonction f .

En considérant que y est la fonction inconnue qui dépend de x , l'équation différentielle peut se noter : $y' =$

b) L'équation $y' = 2x^2 - 3$ est également une équation différentielle.
L'inconnue est la fonction y dont la dérivée est égale à $2x^2 - 3$.

2) Équation différentielle du type $y' = f$

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

La fonction g est une **solution** de l'équation différentielle $y' = f$ si et seulement si $g'(x) = f(x)$.

Propriété :

Dire que F est une primitive de f , revient à dire que F est une solution de l'équation différentielle $y' = f$.

En effet, $F' = f$.

Méthode : Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

 **Vidéo** <https://youtu.be/LX8PxR-ScfM>

Prouver que la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln(x)$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

Correction

$$g'(x) = 3 \times 2x + \frac{1}{x} = 6x + \frac{1}{x}$$

Donc, g est solution de l'équation différentielle : $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

3) Équations différentielles du type $y' = ay$

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration au programme :

 **Vidéo** <https://youtu.be/FQlxi8JKmg4>

• Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.

Alors, $f'(x) = C \times ae^{ax} = a \times Ce^{ax} = af(x)$.

Donc $f'(x) = af(x)$.

f est donc solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

• Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

Et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = -ae^{-ax} \times f(x) + e^{-ax} \times f'(x)$.

Comme f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, on a : $f'(x) = af(x)$.

Ainsi : $g'(x) = -e^{-ax} \times af(x) + e^{-ax} \times f'(x)$

$$= -e^{-ax} \times f'(x) + e^{-ax} \times f'(x) = 0.$$

La fonction g est donc égale à une constante réelle C , soit :

$$e^{-ax} \times f(x) = C.$$

$$\text{Et donc : } f(x) = C \times \frac{1}{e^{-ax}} = Ce^{ax}.$$

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$



Vidéo <https://youtu.be/YJNHTq85tJA>

On considère l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$.

1) a) Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation.

b) Représenter à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, quelques courbes des fonctions solutions.

2) Déterminer l'unique solution f telle que $f(1) = 2$.

Correction

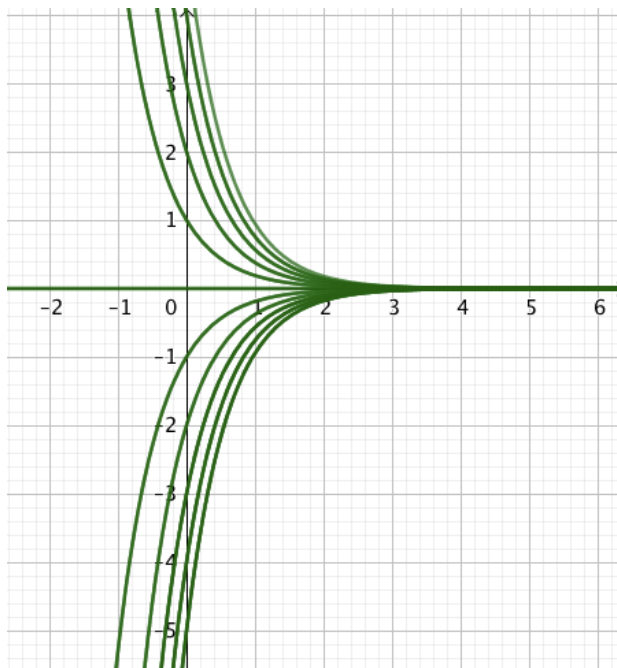
1) a) $3y' + 5y = 0$

$$3y' = -5y$$

$$y' = -\frac{5}{3}y$$

Les solutions sont les fonctions de la forme : $x \mapsto Ce^{-\frac{5}{3}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

b) Pour différentes valeurs de C , on obtient :



2) f est solution de l'équation différentielle, donc de la forme : $f(x) = Ce^{-\frac{5}{3}x}$

$$\text{Donc } f(1) = Ce^{-\frac{5}{3} \times 1} = Ce^{-\frac{5}{3}}$$

Or, $f(1) = 2$.

Donc : $Ce^{-\frac{5}{3}} = 2$

$$Ce^{-\frac{5}{3}} = 2$$

$$C = \frac{2}{e^{-\frac{5}{3}}}$$

$$C = 2e^{\frac{5}{3}}$$

Et donc : $f(x) = 2e^{\frac{5}{3}} e^{-\frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3}-\frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3}(1-x)}$

Propriété : Si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ et kf , $k \in \mathbb{R}$, sont également solutions de l'équation différentielle.

Démonstrations :

$$-(f + g)' = f' + g' = af + ag = a(f + g)$$

$$-(kf)' = kf' = k \times af = a(kf)$$

4) Équations différentielles du type $y' = ay + b$

Propriété : La fonction $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$). Cette solution est appelée **solution particulière constante**.

Démonstration :

On pose : $g(x) = -\frac{b}{a}$. Alors $g'(x) = 0$.

Or, $ag(x) + b = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0 = g'(x)$.

Donc : $g'(x) = ag(x) + b$.

g est donc solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Solutions de l'équation
 $y' = ay$

Solution particulière
constante de l'équation
 $y' = ay + b$

Remarque : L'équation $y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$

 Vidéo https://youtu.be/F_LQLZ8rUhg

 Vidéo <https://youtu.be/CFZr44vny3w>

On considère l'équation différentielle $2y' - y = 3$.

- a) Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation.
 b) Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = -1$.

Correction

$$\begin{aligned} \text{a) } 2y' - y &= 3 \\ 2y' &= y + 3 \\ y' &= \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

- Une solution particulière constante est la fonction : $x \mapsto -3$.

En effet : $-\frac{b}{a} = -\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = -3$.

- Les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$ sont de la forme : $x \mapsto Ce^{\frac{1}{2}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

- Les solutions de l'équation différentielle $2y' - y = 3$ sont donc de la forme :

$$x \mapsto Ce^{\frac{1}{2}x} - 3, C \in \mathbb{R}$$

b) f est solution de l'équation différentielle, donc de la forme : $f(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - 3$, $C \in \mathbb{R}$

Donc $f(0) = Ce^{\frac{1}{2} \times 0} - 3 = C - 3$

Or, $f(0) = -1$

Donc : $C - 3 = -1$

$$C = 3 - 1$$

$$C = 2$$

Et donc : $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 3$

5) Équations différentielles du type $y' = ay + f$

Propriété : f est une fonction définie sur un intervalle I .

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ ($a \neq 0$) sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto Ce^{ax} + p(x), \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Solutions de l'équation
 $y' = ay$

Solution particulière
 de l'équation $y' = ay + f$

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + f$

 **Vidéo** <https://youtu.be/QeGvVncvylc>

On considère l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.

a) Démontrer que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution particulière de l'équation différentielle.

b) En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation différentielle.

Correction

$$\text{a) } p'(x) = -\frac{1}{2} \times 2x - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } p'(x) - 2p(x) &= -x - \frac{1}{2} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) \\ &= -x - \frac{1}{2} + x^2 + x + \frac{1}{2} \\ &= x^2 \end{aligned}$$

$$\text{On a donc : } p'(x) - 2p(x) = x^2$$

La fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est donc une solution particulière de l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.

b) Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$ sont de la forme $x \mapsto Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

On en déduit que les solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$ sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}, C \in \mathbb{R}.$$